

La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 5 exercices.

Les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité traiteront les exercices 1, 2, 3 et 4.

Les élèves suivant l'enseignement de spécialité traiteront les exercices 1, 2, 3 et 5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats.

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{aligned}e^{2x-3} &= e^2(e^3)^6 \\ e^{-2x} &= -2 \\ e^{2x+2} - e^{3x-5} &< 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{3x}e^{-4} &= 1 \\ e^{(x-4)(2x-1)} &= e \\ e^{-3x+2} &< 1\end{aligned}$$

a. $e^{2x-3} = e^2(e^3)^6 \Leftrightarrow e^{2x-3} = e^{20}$ donc $x = 23/2$ et $S = \left\{ \frac{23}{2} \right\}$ 0.5 pt
 $e^{2x-3} = e^2(e^3)^6 \Leftrightarrow 2x-3 = 20$

b. $e^{3x}e^{-4} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-4} = e^0$ donc $x = 4/3$ et $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$ 0.5 pt
 $e^{3x}e^{-4} = 1 \Leftrightarrow 3x-4 = 0$

c. $e^{-2x} = -2$ la fct exp est strictement positive $S = \emptyset$ 0.5 pt

d. $e^{(x-4)}e^{(2x-1)} = e \Leftrightarrow e^{(x-4)(2x-1)} = e^1$
 $e^{(x-4)}e^{(2x-1)} = e \Leftrightarrow (x-4)(2x-1) = 1$
 $(x-4)(2x-1) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 - 1 = 0$
 $\Delta = 81 - 24 = 57$
 $x_1 = \frac{9 + \sqrt{57}}{4}$ ou $x_2 = \frac{9 - \sqrt{57}}{4}$ $S = \left\{ \frac{9 - \sqrt{57}}{4}, \frac{9 + \sqrt{57}}{4} \right\}$ 1pt

e. $e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0 \Leftrightarrow e^{2x+2} < e^{3x-5}$ donc $x > 7$ et $S =]7, +\infty[$ 0.75 pt
 $e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0 \Leftrightarrow 2x+2 < 3x-5$

f. $e^{-3x+2} < 1 \Leftrightarrow e^{-3x+2} < e^0$ donc $x > 2/3$ et $S = \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[$ 0.75 pt
 $e^{-3x+2} < 1 \Leftrightarrow -3x+2 < 0$

EXERCICE 2 (6 points) *Pondichéry juin 2012*

Commun à tous les candidats.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[-1,5 ; 10]$ par :

$$f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-1,5 ; 10]$.

1. a. Démontrer que pour tout réel x de $[-1,5 ; 10]$, on a : $f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$
 b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-1,5 ; 10]$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
3. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions α et β dans l'intervalle $[-1,5 ; 10]$.
 Donner une valeur approchée de α et β à 10^{-2} près.
4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique de votre calculatrice permettant de visualiser de la fonction f ; c'est-à-dire définir X_{\min} ; X_{\max} ; Y_{\min} et Y_{\max} .

$$f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$$

1.a. $f'(x) = (-8x)e^{-x} + (-4x^2 + 5) \times (-1)e^{-x}$ 0.75 pt

$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$$

1. b. la fct exp est strictement positive sur \mathbb{R} ; donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(4x^2 - 8x - 5)$

Etudions le signe de $4x^2 - 8x - 5$

$$\Delta = 64 + 80 = 144 = 12^2 \text{ et } x_1 = \frac{8+12}{8} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ et } x_2 = \frac{8-12}{8} = \frac{-4}{8} = -0,5$$

Si $x \in [-1,5; -0,5]$ et $x \in [2,5; 10]$; f' est positive

Si $x \in [-0,5; 2,5]$ alors f' est négative.

0.5 pt

2. tableau de variations

x	-1,5	-0,5	2,5	10
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	↗	↘	↗	↗
	$f(-1,5)$	$f(-0,5)$	$f(2,5)$	$f(10)$

$$f(-1,5) = -14,92 ; f(-0,5) = 9,59 ; f(2,5) = 1,36 \text{ et } f(10) = 2,98 \quad \text{0,5 pt}$$

3. si $x \in [-1,5; -0,5]$ la fct f est dérivable donc continue et strictement croissante et $3 \in [f(-1,5); f(-0,5)]$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution α dans l'intervalle $[-1,5; -0,5]$. **0,5 pt**

Si $x \in [-0,5; 2,5]$ la fct f est continue et strictement décroissante et $3 \in [f(2,5); f(-0,5)]$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution β dans l'intervalle $[-0,5; 2,5]$. **0,5 pt**

si $x \in [2,5; 10]$ la fct f est continue et strictement croissante et admet $f(10)$ comme maximum et $f(10) < 3$ donc l'équation $f(x) = 3$ n'a pas de solution. **0,25 pt**

Donc sur $[-1,5; 10]$ l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions.

$\alpha \approx -1,12$ et $\beta \approx 1,11$ **0,5 pt**

4. Proposition réglage fenêtre $X_{\min} = -1,5$ et $X_{\max} = 10$ et $Y_{\min} = -15$ et $Y_{\max} = 10$ **0,5 pt**

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue.

Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A : pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5 ; 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A. Chaque réponse sera justifiée.

- Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
- Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
 - Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.
- Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros. On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice. Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

1. Le cout moyen unitaire pour une production de 500 litres, déterminons $f(5)$

$$f(5) = (-4 \times 25 + 5)e^{-5} + 3 ;$$

$$f(5) = -95e^{-5} + 3 \text{ et } f(5) \approx 2,359$$

Le cout moyen unitaire pour une production de 500 litres est de 236 €. **0,5 pt**

2.a. En utilisant la question 2 de la partie A, f admet un minimum $f(2,5)$.

Il faut produire 250 litres de peinture et le cout est de 136 €. **0,5 pt**

2.b. Comme le cout moyen unitaire admet un minimum de 136€, si le prix de vente est de 100€, l'entreprise ne réalisera pas de bénéfice. **0,5 pt**

3. Pour déterminer le seuil de rentabilité, il faut résoudre l'équation $f(x) = 3$, d'après la question 3 de la partie A, il faut produire 112 litres **0,5 pt**

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats.

À l'occasion d'un festival culturel, une agence de voyages propose trois types de transport pour permettre à chaque client de se rendre dans la ville organisatrice afin d'assister à la cérémonie d'ouverture.

Les trois moyens de transport proposés sont l'avion, le train ou le car.

À chacun des clients qui achètent un billet de transport, l'agence propose de souscrire une assurance multirisque qui permet, sous certaines conditions, une indemnisation en cas de retard ou de vol de bagages.

Une enquête montre que 55 % des clients choisissent l'avion, que 40% choisissent le train et que les autres choisissent le car.

De plus, parmi les clients ayant choisi l'avion, 20% ont souscrit l'assurance multirisque ; ils sont 8% à choisir cette assurance parmi ceux qui ont choisi le voyage en train et seulement 4% parmi ceux qui ont choisi le car.

On prend au hasard le dossier d'un client qui se rendra à la cérémonie d'ouverture du festival, chaque dossier ayant la même probabilité d'être choisi.

On note :

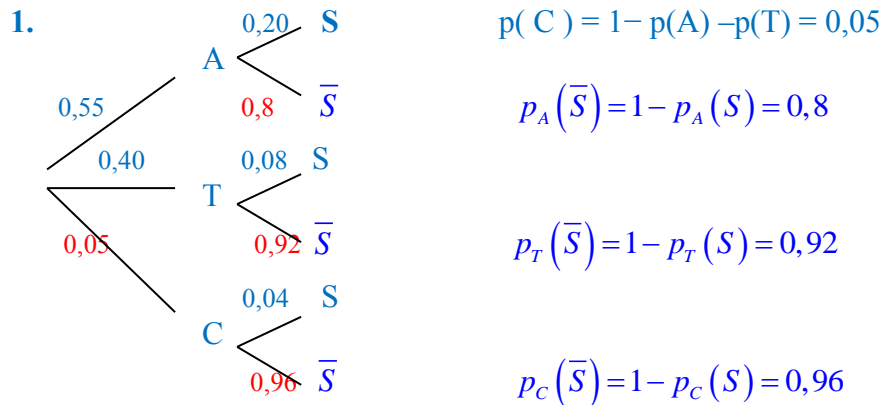
- A l'évènement : « Le client a acheté un billet d'avion » ;
- T l'évènement : « Le client a acheté un billet de train » ;
- C l'évènement : « Le client a acheté un billet de car » ;
- S l'évènement : « Le client a souscrit une assurance multirisque » et \bar{S} son évènement contraire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisque. On donnera la valeur exacte de cette probabilité.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,144.
4. On prend un dossier au hasard parmi les clients n'ayant pas souscrit une assurance multirisque.
Calculer la probabilité que ce dossier soit celui d'un client voyageant en train.
Le résultat sera donné arrondi au millième.

5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On choisit trois dossiers au hasard, indépendamment les uns des autres.

Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque.



1pt

2. Probabilité que le dossier soit celui d'un voyageur en train et qu'il est souscrit l'assurance.

$$p(T \cap S) = p(T) \times p_T(S)$$

$$p(T \cap S) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$$

1pt

3. Probabilité de S

Les événements A ; T et C forment une partition de l'univers ; p(S) est une probabilité totale.

$$p(S) = p(A \cap S) + p(T \cap S) + p(C \cap S)$$

$$p(S) = 0,55 \times 0,2 + 0,032 + 0,05 \times 0,04$$

$$p(S) = 0,144$$

1.5pt

4. S l'événement : « le dossier est celui d'un client ayant pris l'assurance » est considéré comme l'événement succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,144.

On répète 3 fois cette épreuve de façon identique et indépendante.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de client achetant l'appareil photo en promotion. X suit la loi binomiale B(3 ; 0,144) .

Loi de probabilité non demandé sur cet exercice ; on voulait que le calcul suivant :

$$p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3)$$

$$p(X \geq 2) = 3 \times 0,144^2 \times (1 - 0,144) + 0,144^3$$

$$p(X \geq 2) \approx 0,056$$

1.5pt

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité uniquement.

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après-midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.

Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.

Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.

La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation. On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $u_0 = 80$.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1. Montrer que $u_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = u_n - 200$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Pour tout entier naturel n , exprimer a_n en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0,95^n$. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

1. $u_1 = u_0 - \frac{5}{100}u_0 + 10$ et $u_1 = 0,95u_0 + 10$ d'où $u_1 = 0,95 \times 80 + 10 = 86$ 0,5pt

2. si u_n est le nombre d'enfants inscrits au centre aéré en 2010 + n et si u_{n+1} est le nombre d'enfants inscrits au centre aéré en 2010 + (n+1) on a :

$u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 10$ et $u_{n+1} = 0,95u_n + 10$ 0,5pt

3. On pose $a_n = u_n - 200$

$$a_{n+1} = u_{n+1} - 200$$

$$a_{n+1} = 0,95u_n - 200$$

$$a_{n+1} = 0,95(a_n + 200) - 200$$

$$a_{n+1} = 0,95a_n$$

1pt

La suite a_n est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme a_0 ;

$$a_0 = u_0 - 200 = -120$$

0.5pt

Donc $a_n = -120 \times 0,95^n$ et en remplaçant $u_n = 200 - 120 \times 0,95^n$ 0.5pt

4. Déterminons la différence $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 200 - 120 \times 0,95^{n+1} - (200 - 120 \times 0,95^n)$$

$$u_{n+1} - u_n = -120 \times 0,95^n (0,95 - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = 6 \times 0,95^n$$

0,5pt

$6 \times 0,95^n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$; la suite u_n est strictement croissante, le nombre d'inscrites augmente toutes les semaines. 0,5pt

5. Il faut trouver le plus petit entier n tel que $u_n \geq 150$

$$u_n \geq 150 \Leftrightarrow 200 - 120 \times 0,95^n \geq 150$$

$$u_n \geq 150 \Leftrightarrow 200 - 150 \geq 120 \times 0,95^n$$

$$u_n \geq 150 \Leftrightarrow \frac{50}{120} \geq 0,95^n \text{ avec la calculatrice on trouve } n=18 \quad 1\text{pt}$$

EXERCICE 5 (5 points)

Spécialité uniquement

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 2b \\ b^2 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3a-2 & 4 \\ 4 & 2a+5 \\ 7 & a+b \end{pmatrix}$$

Déterminer a et b de telle sorte que l'on ait $A = B$.

2. On donne les matrices :

$$C = \begin{pmatrix} -a+2b & -2 \\ 3 & 3+b \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+2b & -5a \end{pmatrix}$$

Déterminer a et b de telle sorte que les matrices C et D soient inverses l'une de l'autre.

3. C'est la rentrée ! Adèle, Benjamin, Clothilde et Victor vont s'acheter ensemble quelques fournitures scolaires.

- Adèle achète 4 cahiers, 2 classeurs et 5 stylos.
- Benjamin achète 6 cahiers et 2 stylos.
- Clothilde achète 1 cahier et 4 stylos.
- Victor achète 1 classeur et 5 stylos.

Les cahiers, classeurs et stylos sont vendus aux prix unitaires hors taxes de, respectivement, 1,5€, 2,3€ et 1,7€.

Le taux de TVA applicable sur ces produits est de 7%.

En précisant clairement les matrices utilisées, donner **un** calcul matriciel permettant de déterminer le montant total TTC dépensé pour l'achat de l'ensemble de ces fournitures.

1. Deux matrices sont égales si tous leurs coefficients sont égaux

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3a - b \\ b^2 = 4 \\ 7 = 7 \\ 2b = 4 \\ 9 = 2a + 5 \\ 4 = a + b \end{cases} \text{ et donc } A=B \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \quad 0,75\text{pt}$$

2. Deux matrices sont inverses si $C \times D = I$

$$C \times D = \begin{pmatrix} (-a+2b) \times 1 - 2(a+2b) & (-a+2b) \times 2 - 2 \times (-5a) \\ 3 \times 1 + (3+b)(a+2b) & 3 \times 2 + (3+b) \times (-5a) \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \times D = I \Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 2b = 1 \\ -2a + 4b + 10a = 0 \\ 3 + 3a + 6b + ab + 2b^2 = 0 \\ 6 - 15a - 5ab = 1 \end{cases} \text{ et donc } a = 1 \text{ et } b = -2 \quad 0,75\text{pt}$$

3. On pose F la matrice des fournitures et P celle des prix

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,3 \\ 1,7 \end{pmatrix} \text{ de plus il faut appliquer une TVA de 7\%}$$

Soit C une matrice permettant de déterminer le montant total dépensé

$C = F \times 1,07P$ soit $C = 1,07 \times F.P$ *cette écriture vaut 0.75pt, calcul suivant non demandé :*

$$C = \begin{pmatrix} 1,07(4 \times 1,5 + 2 \times 2,3 + 5 \times 1,7) \\ 1,07(6 \times 1,5 + 2 \times 1,7) \\ 1,07(1 \times 1,5 + 4 \times 1,7) \\ 1,07(1 \times 2,3 + 5 \times 1,7) \end{pmatrix} \text{ d'où } C = \begin{pmatrix} 20,437 \\ 13,268 \\ 8,881 \\ 11,556 \end{pmatrix}$$

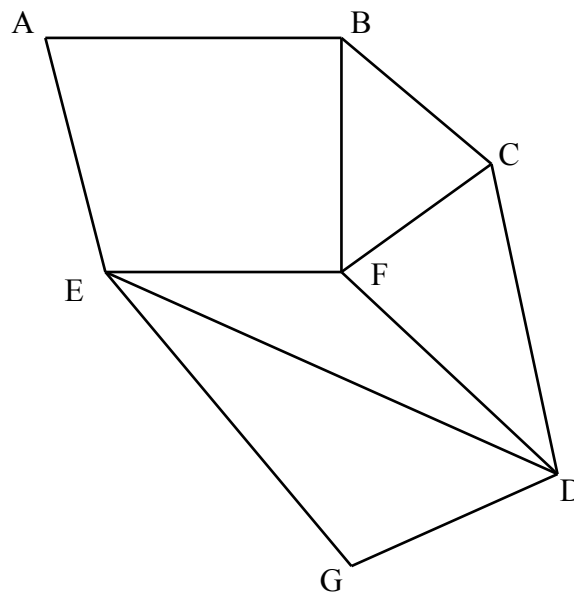
$$U = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$\text{La dépense totale } C \times U = (20,437 + 13,268 + 8,881 + 11,556) \\ = (54,178)$$

La dépense totale est de 54,18€.

Partie B

On considère le graphe G ci-dessous.



1. **a.** Déterminer l'ordre du graphe G.
b. Donner la définition d'un graphe complet puis déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3.
2. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe G (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique).
3. **a.** On donne deux matrices N et T.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 6 & 8 & 9 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 10 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 4 & 6 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 2 & 8 & 9 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 10 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 9 & 10 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

une des deux matrices N ou T est la matrice M^3 . Sans calculs, indiquer quelle est matrice M^3 en justifiant votre réponse.

- b.** Combien de chaînes de longueur 3 y a-t-il entre les sommets B et D ?
c. Déterminer ces chaînes.

1.a. G est un graphe d'ordre 7, il est formé de sept sommets 0,25pt

1.b. Un sous graphe complet est une liste de sommets, dont deux sommets quelconque sont reliés par une arête ou adjacents. Sous graphe d'ordre 3 : B ;C ;F *par exemple* 0,5pt

$$2. M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,75pt

3.a. La matrice T n'est pas symétrique, (le coefficient de la première ligne dernière colonne est 2 ; et celui de la dernière ligne première colonne est 1) elle ne peut donc pas être M^3 .

La matrice N est donc M^3 . 0,5pt

3. b. Entre les sommets B et D (le coefficient de 2ème ligne 4 ème colonne de la matrice N est 4) ; il y a donc 4 chaînes de longueur 3 allant de B à D. 0,25pt

3.c. Les chaînes de longueur trois : **B – C – F – D**

B – F – C – D

B – A – E – D

B – F – E – D

0,5pt