Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminale ES3
Année 2011-2012		Mathématiques
Mardi 20 septembre 2011	Durée : 2 heures	DTL N°1

La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 5 exercices.

Exercice 1 (3 *points)*
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Le candidat notera à chaque fois sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. (+0,5 par bonne réponse et -0,25 par réponse fausse)
Aucune justification n'est demandée.

1. Pout les 4 questions suivantes, on considère la fonction *f* définie sur un intervalle $\mathrm{I} = \left]-1\,;+\infty\right[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$. On appelle C_f une représentation graphique de la fonction *f* dans un repère donné du plan.

i) a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$ b. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$ c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$

ii) C_f admet une asymptote d'équation

a. $y = 2$ b. $y = -1$ c. $x = -2$

iii) Sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$, la fonction *f* peut s'écrire :

a. $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ b. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ c. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

iv) Le signe de $f(x)$ sur $\left]-1\,;+\infty\right[$ est :

a.

x	-1 0 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$

b

x	-1 -1/2 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$

c

x	-1 $+\infty$
$f(x)$	$+$

2. La limite en + ∞ de la fonction *f* définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3+3x}{(2x-1)^3}$

a. $+\infty$ b. $-\infty$ c. -1 d. $-\dfrac{1}{4}$

3. On désigne par g une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-1;+\infty[$.

Si la fonction g vérifie $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

a. On peut affirmer que la fonction g est croissante sur I ;
b. On peut affirmer que la fonction g est décroissante sur I ;
c. On ne peut pas en déduire le sens de variation de g sur I.

Exercice 2 (*4 points*)
Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement a et c.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x+5}{7-2x}$ b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x^2+5x^3}{1-2x^4}$ c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{3-x}$ d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2}{2-x}$

Exercice 3 (*4 points*)
Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;2[$ par :

$$g(x) = 3 - 2x + \frac{3}{2-x}$$

(C) est sa courbe représentative dans un repère.

a. Etudier la limite de g en 2.
b. Etudier la limite de g en $-\infty$.
c. d est la droite d'équation $y = 3 - 2x$. Démontrer que d est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$.
d. Etudier le signe de $\dfrac{3}{2-x}$.
e. En déduire la position de (C) par rapport à d au voisinage de $-\infty$.

Exercice 4 (*2 points*)
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{(2x-3)(x-7)}{(x+3)(3x-1)}}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 5 (*7points*) *Nouvelle-Calédonie mars 2011*
L'entreprise Co Ton produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise Co Ton est donné en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

Le graphique de l'annexe 1 donne la représentation graphique de la fonction C.

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise Co Ton pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise Co Ton ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

a. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise Co Ton réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$B(x) = 680x - C(x)$$

Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 10] on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$$

c. Étudier les variations de la fonction B sur $[0;10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise Co Ton est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite.
On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

On donne :

$$C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

1. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;10]$, $C_M'(x)$ est du signe de $x-5$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;10]$.

b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum? Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

Annexe 1 (exercice 5) – à rendre avec la copie.