

La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 4 exercices.

Exercice 1 (5 points)

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction proposée sur l'intervalle I considéré.

- a) $f : x \mapsto 3x^5 - 5x^3 + 2x - 2$ sur $I = \mathbb{R}$.
- b) $g : x \mapsto (x^2 - 1)\sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction de dénominateur égal à $2\sqrt{x}$).
- c) $h : x \mapsto \frac{3x^2 - 2x + 1}{-x^2 + 3}$ sur $I = [2; +\infty[$.
- d) $\varphi : x \mapsto \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ sur $I =]1; +\infty[$.
- e) $\Phi : x \mapsto \frac{1}{(x-2)(x-3)}$ sur $I =]2; 3[$.

Exercice 2 (4 points)

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2}$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction g .
3. Etudier les variations de la fonction g sur \mathbb{R} .
4. Déterminer les équations réduites des tangentes (T_1) et (T_2) à \mathcal{C}_g aux points d'abscisses respectives $x = 1$ et $x = 2$.
5. Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution, α , sur l'intervalle $[0; 1]$ et une solution, β , sur l'intervalle $[4; 8]$. On donnera pour chacune de ces solutions un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
6. En vous aidant de votre calculatrice, représenter la courbe \mathcal{C}_g (on pensera à fournir un tableau de valeurs), les tangentes (T_1) et (T_2) et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 (3 points)

Dans cet exercice, on se propose de déterminer la fonction dérivée de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .
2. On pose $g = f^2$. Calculer $g'(x)$ pour tout x réel.
3. Pour tout x réel, utiliser une formule du cours pour exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.
4. Dédurre des deux questions précédentes $f'(x)$ en fonction de x .

Exercice 4 (8 points) (D'après Pondichéry 13 avril 2011)

Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.

Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en **milliers d'euros**, les quantités en **centaines de litres**.

Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_T(x)$, pour x variant de 0 à 5, le coût total de production correspondant.

La courbe fournie en **annexe 1** est la représentation graphique de la fonction C_T sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

La tangente à Γ au point A (1 ; 1) est horizontale.

PARTIE A

1. a. On admet que la recette $R(x)$ (en **milliers d'euros**) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0 ; 5]$ par $R(x) = 1,5x$.

Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?

b. Tracer, sur le graphique fourni en **annexe 1**, le segment représentant graphiquement la fonction R .

2. Lectures graphiques

Les questions a., b., c. suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique en annexe 2.

Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.

a. Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégagant un bénéfice positif.

b. Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.

c. Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il-maximal ?
À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

PARTIE B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_T est définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par $C_T(x) = 0,15(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1$

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par : $B(x) = -0,15x^3 + 0,45x^2 + 1,05x - 0,85$
Calculer $B(2)$, et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la **partie A**.

2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0,25 ; 5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Montrer que $B'(x) = -0,45x^2 + 0,9x + 1,05$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction B , sur l'intervalle $[0 ; 5]$:

4. a. Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ?
(On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres).

Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.

b. Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

Annexe 1

