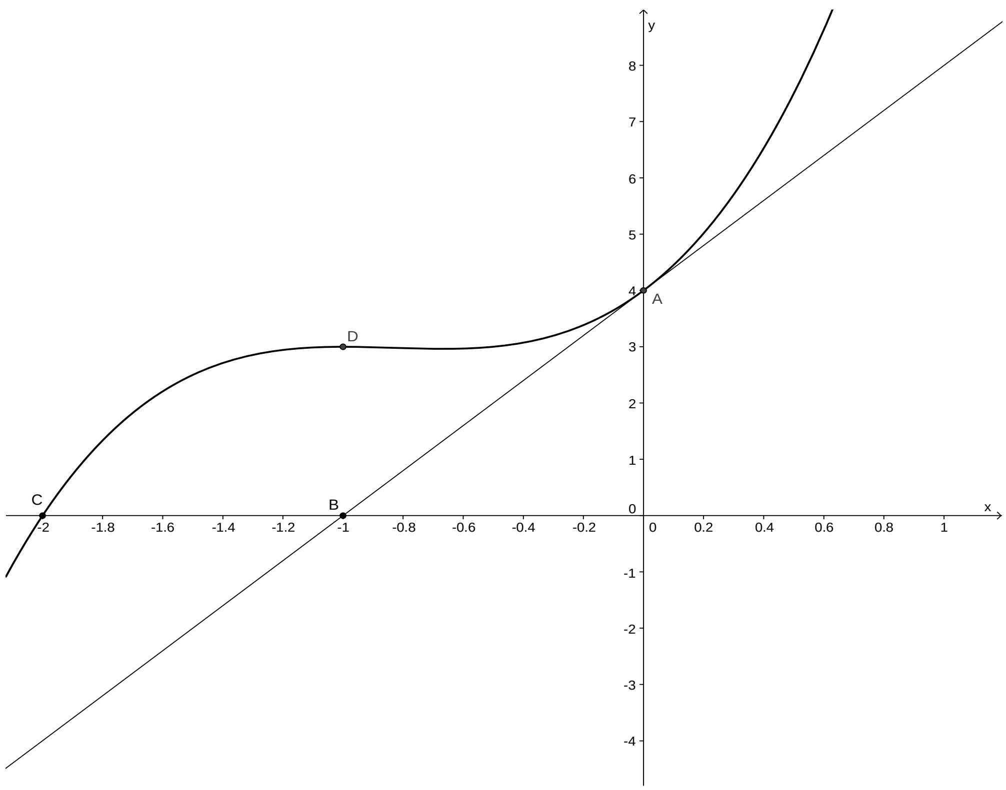
La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 4 exercices.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des 6 questions, une seule réponse est exacte. Le candidat notera à chaque fois sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte ($+0{,}5$ *par bonne réponse et* $-0{,}25$ *par réponse fausse).*
Aucune justification n'est demandée.

On considère une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On précise que :

- La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right]$ et sur l'intervalle $\left[-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1\,;-\dfrac{2}{3}\right]$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $\mathrm{D}(-1\,;3)$ et y admet une tangente horizontale.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un unique point : $\mathrm{C}(-2\,;0)$.
- La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{A}(0\,;4)$ passe par le point $\mathrm{B}(-1\,;0)$.

Question 1

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $\mathrm{A}(0\,;4)$ est :

a. $y = x+4$ b. $y = 4x+1$ c. $y = 4x+4$

Question 2

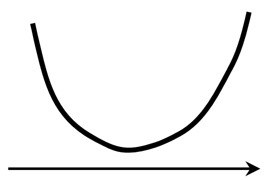
L'équation $f(x)=3$ admet :

a. 0 solution b. 1 solution c. 2 solutions

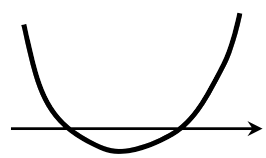
Question 3

Parmi les courbes suivantes laquelle pourrait être la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction f (la flèche représente l'axe des abscisses) :

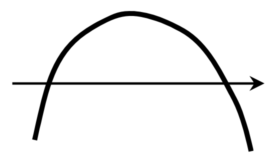
a.



b.



c.



Pour les trois questions suivantes, on pose : $g = \sqrt{f}$.

Question 4

La fonction g est dérivable sur :

a. $\mathbb{R}$ b. $]-2\,;+\infty[$ c. $[-2\,;+\infty[$

Question 5

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle :

a. $[-2\,;+\infty[$ b. $[-2\,;-1]$ c. $[-2\,;0]$

Question 6

On a :

a. $g'\left(-\frac{4}{5}\right)\times g'(0) < 0$ b. $g'\left(-\frac{4}{5}\right)\times g'(0) = 0$ c. $g'\left(-\frac{4}{5}\right)\times g'(0) > 0$

Exercice 2 (6 points)

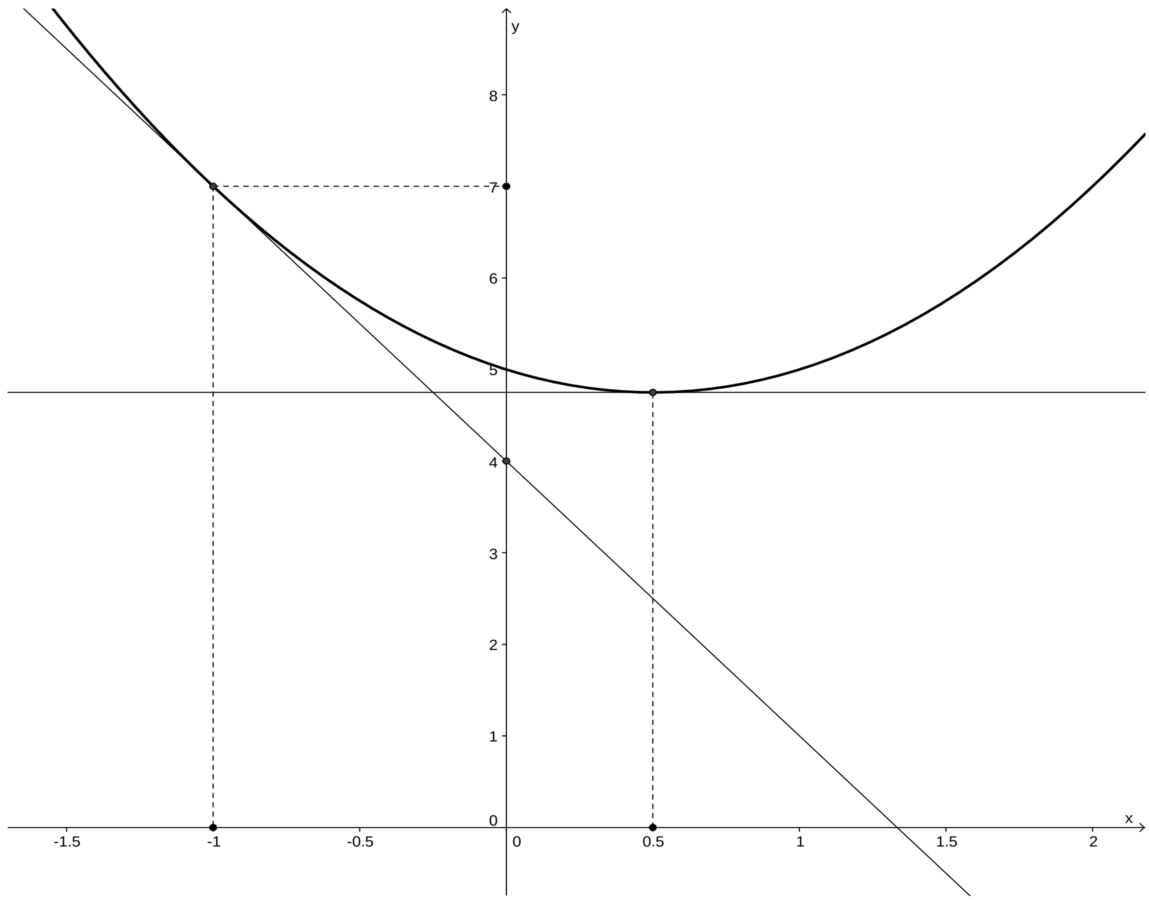
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax^2 + bx + c \text{ (avec } a \neq 0)$$

On note $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique ($\mathscr{C}_g$ apparaît en gras sur la figure ci-dessous. On a également fait apparaître deux tangentes) de la fonction g dans un repère orthonormal.



Déterminer, en vous aidant du graphique, les valeurs des réels a, b et c.

Sur le dessin on peut lire :

$g(-1) = 7$; $g(0) = 5$; $g'(0,5) = 0$ et $g'(-1) = -3$ avec $g'(x) = 2ax + b$

$g(-1)=7 \Leftrightarrow a-b+c=7$
$g(0)=5 \quad \Leftrightarrow c=5$
$g'(1/2)=0 \Leftrightarrow 2a\times 0{,}5+b=0$
$g'(-1)=-3 \Leftrightarrow 2a\times(-1)+b=-3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a-b=2 \\ a+b=0 \\ -2a+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a=1 \\ b=-1 \\ -2a+b=-3 \text{ vraie} \end{cases}$$

Donc $g(x)=x^2-x+5$ 1pt

Partie B

Soit *f* la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+5}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal.

1. Déterminer, en justifiant, le domaine de définition de la fonction *f*. 0,5pt

   f existe si et seulement si $g(x)\geq 0$ d'après le graphique la fonction g est toujours positive donc $D_f=\mathbb{R}$

2. Déterminer, en justifiant, le domaine de dérivabilité de la fonction *f*. 0,5pt

   f est dérivable si et seulement si $g(x)>0$ d'après le graphique la fonction g est toujours positive donc $D_f=\mathbb{R}$

3. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*. 0,5pt

   $$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+5}}$$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*. 0,5pt

   Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $2x-1$

x	$-\infty$		½		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1/2)$	↗	$+\infty$

On a $f(1/2)=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+5}=\sqrt{\frac{19}{4}}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x+5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \text{on pose } X=x^2-x+5 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

5. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote oblique d'équation $y=x-\frac{1}{2}$.

(indication : on utilisera l'expression conjuguée de $\sqrt{x^2-x+5}-\left(x-\frac{1}{2}\right)$)

$f(x)-(x-1/2)=\sqrt{x^2-x+5}-(x-1/2)$ 0,5pt pour le calcul

$$f(x)-(x-1/2)=\sqrt{x^2-x+5}-(x-1/2)\times\frac{\sqrt{x^2-x+5}+(x-1/2)}{\sqrt{x^2-x+5}+(x-1/2)}$$

$$f(x)-(x-1/2)=\frac{x^2-x+5-(x-1/2)^2}{\sqrt{x^2-x+5}+(x-1/2)}=\frac{\frac{19}{4}}{\sqrt{x^2-x+5}+(x-1/2)}=\frac{19}{4\sqrt{x^2-x+5}+(x-1/2)}$$

Etudions la limite de $f(x)-(x-½)$

$$\left.\begin{array}{l} * \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x+5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \text{je pose } X=x^2-x+5 \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty \\ * \lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{1}{2}=+\infty \end{array}\right\}\text{par somme } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+5}+(x-1/2)=+\infty$$

Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1/2)=0$ donc C_f a une asymptote oblique d'équation

$y=x-½$ au voisinage de $(+\infty)$ 0,5pt

6. Démontrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Déterminons $f(1)=\sqrt{1-1+5}=\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}\simeq 2,23$ de plus on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

● f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1;+\infty[$; f est strictement croissante sur $[1/2;+\infty[$ donc sur $[1;+\infty[$ et $3\in\left[\sqrt{5};+\infty\right[$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ a une unique solution comprise dans l'intervalle $[1;+\infty[$ et 1pt

$2<\alpha<3$

$2,5<\alpha<2,6$ 0,5pt

$2,56<\alpha<2,57$

7. Donner, en fonction du réel k, le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=k$ (aucune justification n'est demandée).

si $k<\frac{\sqrt{19}}{2}$ alors l equation $f(x)=k$ n a pas de soluition

si $k=\frac{\sqrt{19}}{2}$ alors l equation $f(x)=k$ a une unique solution 0,5pt

si $k>\frac{\sqrt{19}}{2}$ alors l equation $f(x)=k$ a deux solutions

Exercice 3 (4 points)

1. Déterminer, sur l'intervalle considéré, une primitive de la fonction f :

a. $f(x)=(x^2+2)(x^3+6x-7)^7$ avec $I=\mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive sur $\mathbb{R}$

on voudrait avoir f de la forme k u'u ^{7} avec $u(x)=x^3+6x-7$ et u'(x) = $3x^2+6$

$f(x)=\left[(3x^2+6)(x^3+6x-7)^7\right]\times\frac{1}{3}$; alors F est de la forme k $\frac{u^8}{8}$ et

$F(x)=\left[\frac{(x^3+6x-7)^8}{8}\right]\times\frac{1}{3}+2011$ et $\boxed{F(x)=\frac{(x^3+6x-7)^8}{24}+2011}$ 1pt

b. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3x^2-1}}$ avec $I=\left]\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right[$

f est continue sur I et admet une primitive sur I

on voudrait avoir f de la forme $k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x)=3x^2-1$ et $u'(x)=6x$

$f(x)=\left[\frac{6x}{\sqrt{3x^2-1}}\right]\times\frac{1}{6}$; alors F est de la forme $k\times 2\sqrt{u}$ et

$F(x)=\left[2\sqrt{3x^2-1}\right]\times\frac{1}{6}+2011$ et $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-1}+2011}$ 1pt

Déterminer, sur l'intervalle considéré, les primitives de la fonction g puis la primitive G satisfaisant la condition indiquée :

c. $g(x)=\frac{5x+1}{(5x^2+2x+1)^2}$ avec $I=\mathbb{R}$ et $G(-1)=0$

g est continue sur I et admet une primitive sur I

on voudrait avoir g de la forme $k\times\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=5x^2+2x+1$ et $u'(x)=10x+2$

$g(x)=\left[\frac{5x+1}{(5x^2+2x+1)^2}\right]\times\frac{1}{2}$; alors G est de la forme $k\times\frac{-1}{u}$ et

$G(x)=\left[\frac{-1}{(5x^2+2x+1)}\right]\times\frac{1}{2}+c$ on a de plus G(– 1) = 0 d'où

$\left[\frac{-1}{(5-2+1)}\right]\times\frac{1}{2}+c=0$ et $c=\frac{1}{8}$ et $\boxed{G(x)=\frac{-1}{2(5x^2+2x+1)}+\frac{1}{8}}$ 1pt

d. $g(x)=\frac{-3}{\sqrt{x}}-x+2-\frac{3}{(2x-1)^2}$ avec $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $G(1)=-1$

g est continue sur I et admet une primitive sur I

$$g(x) = -3\times\frac{1}{\sqrt{x}} - x + 2 - 3\times\frac{2}{(2x-1)^2}\times\frac{1}{2}$$

$$G(x) = -3\times 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x - 3\times\frac{-1}{(2x-1)}\times\frac{1}{2} + c$$

$$G(x) = -6\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2(2x-1)} + c$$ on a de plus G(1) = – 1 d'où

$$-6 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2(1)} + c = -1 \text{ et } c = 5 \text{ et } \boxed{G(x) = -6\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2(2x-1)} + 5}$$

1pt

Exercice 4 (7 points)

Les élèves d'un lycée professionnel hôtelier fabriquent et vendent des tartes salées copieuses aux élèves de l'école d'architecture voisine, qui achètent toute la production.

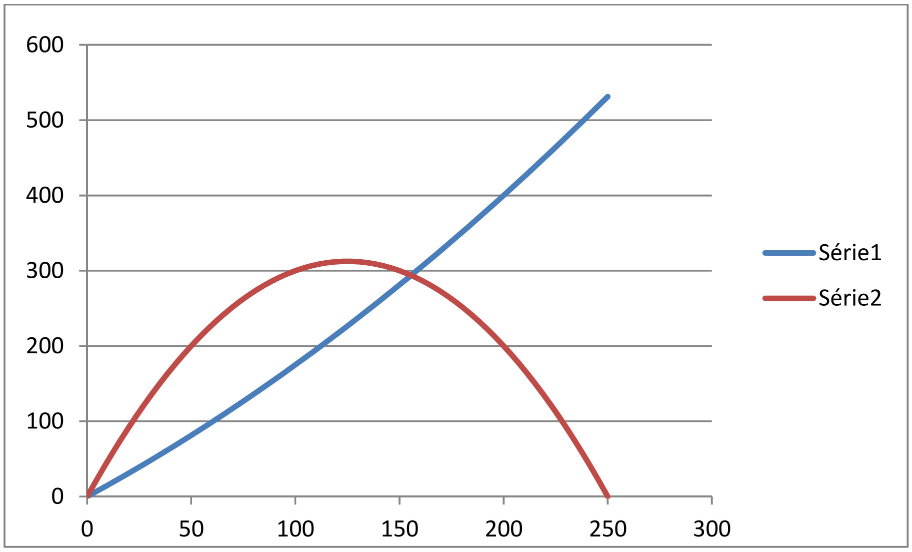
Le coût total de fabrication en euros de q tartes est donné par :

$$C(q) = 1,5q + 0,0025q^2$$

Si on vend la tarte 1€ pièce, on en vend 200 et si on vendait la tarte 1,5€ pièce, on en vendrait 25 de moins.
On admet que la quantité demandée q est une fonction affine du prix p et que l'on a $q \in [0\,;250]$.

1. a) Exprimer la quantité demandée q en fonction du prix p, puis le prix p en fonction de la quantité q.
   q est une fonction affine en fonction du prix p ; q est de la forme q = ap +b ;
   déterminons a et b : $\begin{cases} 1\times a + b = 200 \\ 1,5\times a + b = 175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -50 \\ b = 250 \end{cases}$
   donc $\boxed{q = -50p + 250 \text{ et } p = -0,02q + 5}$ 1pt
   b) Exprimer en fonction de q le chiffre d'affaires $R(q)$ du lycée hôtelier et étudier les variations de R sur l'intervalle $[0\,;250]$.
   R(q) = (– 0,02q + 5)q d'où R(q) = – 0,02q² + 5q 0,75pt
   Etudions les variations de R
   R'(q) = – 0,04q + 5
   Si 0 ≤ q < 125 alors R'(q) > 0 et R est une fonction strictement croissante
   Si 125 < q alors R'(q) < 0 et R est une fonction strictement décroissante
   Si q = 125 alors R'(q) = 0 et R a un extrema 0,75pt

2. Soit $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_C$ les courbes représentatives des fonctions de chiffre d'affaires R et de coût total C dans un repère orthonormal d'unité graphique 1cm pour 20 euros.
   a) Préciser le sens de variation de la fonction C.
   Etudions le sens de variation de *C* ; dérivons *C*
   $C'(q) = 1,5 + 0,005q$ Étudions le signe de C'(q) ; C'(q) > 0 ssi q > -300 donc
   C est une fonction strictement croissante sur [0 ; 250] 0,5pt
   b) Tracer les courbes $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_C$. 1pt



c) Par lecture graphique, indiquer les quantités de tartes que le lycée professionnel doit fabriquer pour réaliser un bénéfice puis la quantité qui permet de réaliser un bénéfice maximal.

Par lecture graphique, la quantité de tartes à produire pour réaliser un bénéfice est comprise entre 0 et 160 tartes (intervalle sur lequel la courbe représentative du chiffre d'affaires est située au-dessus de celle du coût). Le bénéfice semble maximum pour une production de 75 tartes environ. 0,5pt

d) Montrer que le bénéfice $B(q)$ en fonction de q est donné par :

$$B(q) = R(q) - C(q) \quad 0{,}25\text{pt}$$

$$B(q) = 3{,}5q - 0{,}0225q^2$$

B(q) = R(q) – C(q)

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 5q - 1{,}5q - 0{,}0025q^2$$

$$B(q) = -0{,}0225q^2 + 3{,}5q \quad 0{,}5\text{pt}$$

Déterminer par le calcul le nombre de tartes qui permet au lycée hôtelier de réaliser un bénéfice maximal.

Pour trouver le bénéfice maximal, déterminons le maximum de B.

Dérivons B ; $B'(q) = -0{,}045q + 3{,}5$ et $B'(q) = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{3{,}5}{0{,}045}$ et $q \simeq 78$ 0,75pt

Il faut produire 78 tartes pour que le bénéfice soit maximum

Quelle est la valeur de ce bénéfice ? A quel prix les tartes doivent-elles être vendues ?

Le bénéfice maximum est B(78) soit 136,11€ 0,5pt et les tartes sont vendues à $p(78)$ soit 3,44€ 0,5pt

Fin du sujet