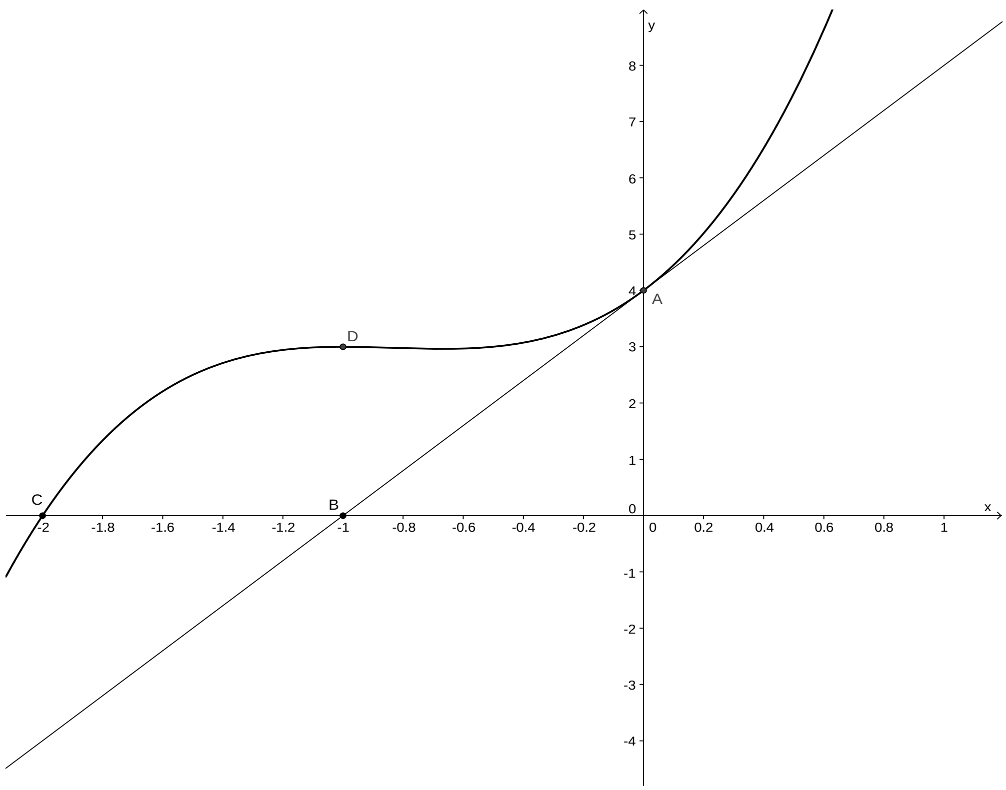
Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminale ES3
Année 2011-2012		Mathématiques
Mardi 8 novembre 2011	Durée : 3 heures	DTL N°2

La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 4 exercices.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des 6 questions, une seule réponse est exacte. Le candidat notera à chaque fois sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte ($+0{,}5$ *par bonne réponse et* $-0{,}25$ *par réponse fausse).*
Aucune justification n'est demandée.

On considère une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On précise que :

- La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$ et sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1\,;-\frac{2}{3}\right]$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $\mathrm{D}(-1\,;3)$ et y admet une tangente horizontale.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un unique point : $\mathrm{C}(-2\,;0)$.
- La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{A}(0\,;4)$ passe par le point $\mathrm{B}(-1\,;0)$.

Question 1

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $A(0\,;4)$ est :

a. $y = x + 4$ b. $y = 4x + 1$ c. $y = 4x + 4$

Question 2

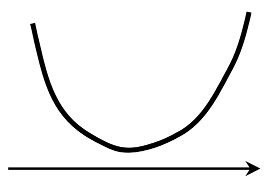
L'équation $f(x) = 3$ admet :

a. 0 solution b. 1 solution c. 2 solutions

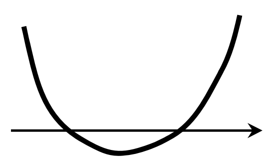
Question 3

Parmi les courbes suivantes laquelle pourrait être la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction *f* (la flèche représente l'axe des abscisses) :

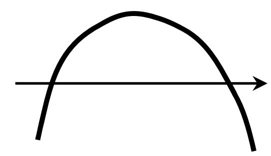
a.



b.



c.



Pour les trois questions suivantes, on pose : $g = \sqrt{f}$.

Question 4

La fonction *g* est dérivable sur :

a. $\mathbb{R}$ b. $]-2\,;+\infty[$ c. $[-2\,;+\infty[$

Question 5

La fonction *g* est strictement croissante sur l'intervalle :

a. $[-2\,;+\infty[$ b. $[-2\,;-1]$ c. $[-2\,;0]$

Question 6

On a :

a. $g'\left(-\frac{4}{5}\right) \times g'(0) < 0$ b. $g'\left(-\frac{4}{5}\right) \times g'(0) = 0$ c. $g'\left(-\frac{4}{5}\right) \times g'(0) > 0$

Exercice 2 (6 points)

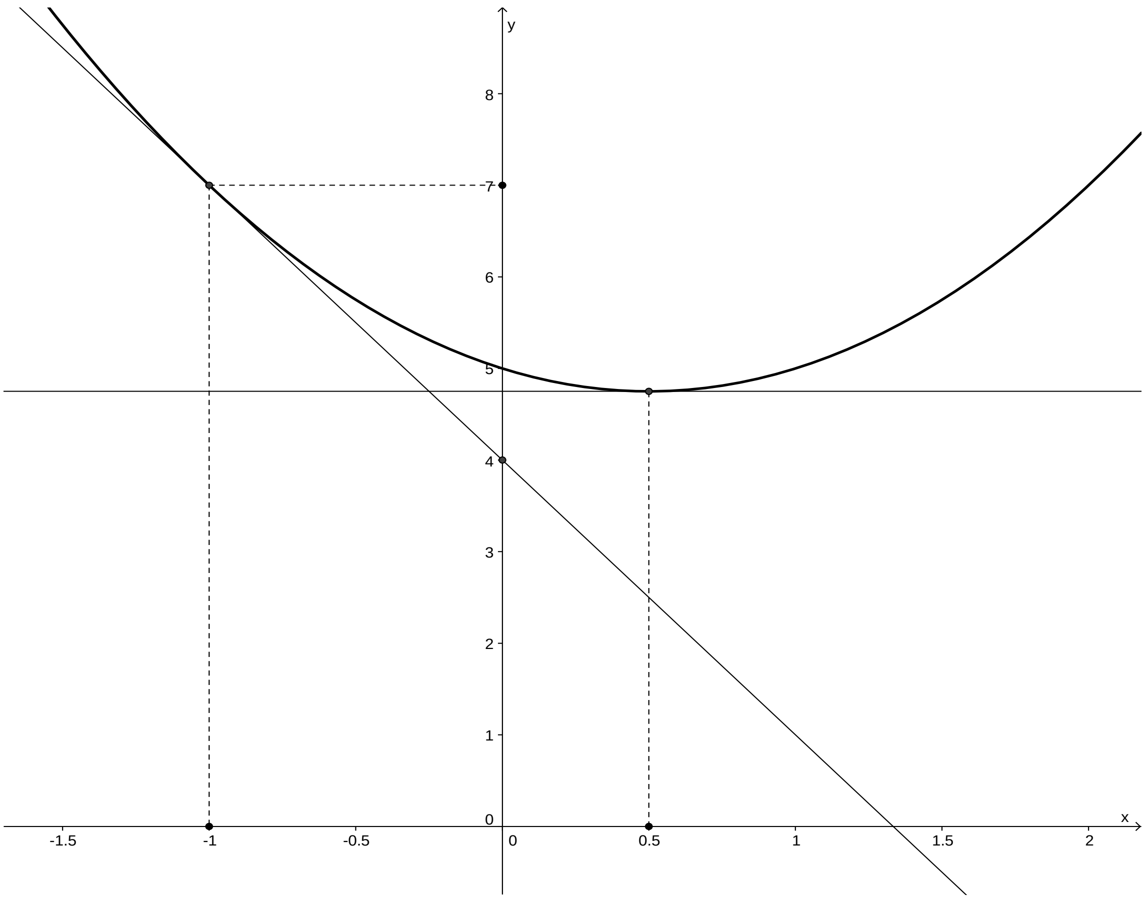
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{avec } a \neq 0)$$

On note $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique (fournie en gras sur la figure ci-dessous) de la fonction g dans un repère orthonormal.



Déterminer, à l'aide des informations ci-dessus, les valeurs des réels a, b et c.

Partie B

Soit *f* la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+5}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal.

1. Déterminer, en justifiant, le domaine de définition de la fonction *f*.
2. Déterminer, en justifiant, le domaine de dérivabilité de la fonction *f*.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.
5. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote oblique d'équation $y=x-\dfrac{1}{2}$.

   (indication : on utilisera l'expression conjuguée de $\sqrt{x^2-x+5}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$)
6. Démontrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
7. Donner, en fonction du réel *k*, le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=k$ (aucune justification n'est demandée).

Exercice 3 (4 points)

1. Déterminer, sur l'intervalle considéré, une primitive de la fonction *f* :

   a. $f(x)=\left(x^2+2\right)\left(x^3+6x-7\right)^7$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

   b. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3x^2-1}}$ avec $\mathrm{I}=\left]\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;+\infty\right[$

2. Déterminer, sur l'intervalle considéré, les primitives de la fonction *g* puis la primitive G satisfaisant la condition indiquée :

   a. $g(x)=\dfrac{5x+1}{\left(5x^2+2x+1\right)^2}$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ et $\mathrm{G}(-1)=0$

   b. $g(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{x}}-x+2-\dfrac{3}{(2x-1)^2}$ avec $\mathrm{I}=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $\mathrm{G}(1)=-1$

Exercice 4 (7 points)

Les élèves d'un lycée professionnel hôtelier fabriquent et vendent des tartes salées copieuses aux élèves de l'école d'architecture voisine, qui achètent toute la production.

Le coût total de fabrication en euros de *q* tartes est donné par :

$$C(q) = 1,5q + 0,0025q^2$$

Si on vend la tarte 1€ pièce, on en vend 200 et si on vendait la tarte 1,5€ pièce, on en vendrait 25 de moins.
On admet que la quantité demandée *q* est une fonction affine du prix *p* et que l'on a $q \in [0\,;250]$.

1. a) Exprimer la quantité demandée *q* en fonction du prix *p*, puis le prix *p* en fonction de la quantité *q*.
   b) Exprimer en fonction de *q* le chiffre d'affaires $R(q)$ du lycée hôtelier et étudier les variations de *R* sur l'intervalle $[0\,;250]$.
2. Soit $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_C$ les courbes représentatives des fonctions de chiffre d'affaires *R* et de coût total *C* dans un repère orthonormal d'unité graphique 1cm pour 20 euros.
   a) Préciser le sens de variation de la fonction *C*.
   b) Tracer les courbes $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_C$.
   c) Par lecture graphique, indiquer les quantités de tartes que le lycée professionnel doit fabriquer pour réaliser un bénéfice puis la quantité qui permet de réaliser un bénéfice maximal.
   d) Montrer que le bénéfice $B(q)$ en fonction de *q* est donné par :

   $$B(q) = 3,5q - 0,0225q^2$$

   Déterminer par le calcul le nombre de tartes qui permet au lycée hôtelier de réaliser un bénéfice maximal.
   Quelle est la valeur de ce bénéfice ? A quel prix les tartes doivent-elles être vendues ?

Fin du sujet