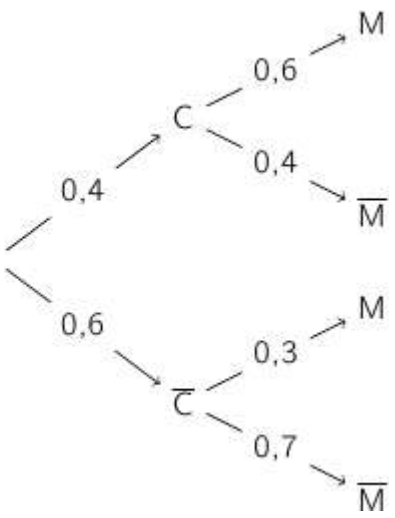
Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminale ES
Année 2012-2013		Mathématiques
Mardi 15 janvier 2013	Durée : 3 heures	DTL N°3

<u>Exercice 1</u> (7 points) *d'après Liban mai 2012*

1. La formule des probabilités conditionnelles donne :

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6$$

2.



3.

$$P(\overline{C} \cap \overline{M}) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(\overline{M})$$
$$= 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

4. Les événements C et $\overline{C}$ constituent une partition de l'univers, on a donc :

$$P(M) = P(C \cap M) + P(\overline{C} \cap M)$$
$$= 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,3$$
$$= 0,42$$

5.

1ère méthode :

$$p(C \cup M) = p(C) + p(M) - p(C \cap M) = 0,4 + 0,42 - 0.4 \times 0,6 = 0,58$$

2ème méthode :

$$p(C \cup M) = 1 - p(\bar{C} \cap \bar{M}) = 0,58$$

6.

a.

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24	$0,6 \times 0,3 = 0,18$	$0,4 \times 0,4 = 0,16$	0,42

b. $E = 75 \times 0,24 + 40 \times 0,18 + 35 \times 0,16 = 30,8$

c. L'espérance à atteindre est : $30,8 \times 1,15 = 35,42$.

On cherche le prix x du « coup de soleil » tel que :

$$\begin{aligned} 0,24(35+x)+0,18x+35\times 0,16=35,42 &\iff 0,24x+35\times 0,24+0,18x+35\times 0,16=35,42 \\ &\iff 0,42x=21,42 \\ &\iff x=51 \end{aligned}$$

Donc le coloriste doit facturer le « coup de soleil » 51 euros.

7.

a. X suit une loi binomiale de paramètre (3 ; 0,42)

b. $p(X=1)=\binom{3}{1}\times 0{,}42^1\times 0.58^2\approx 0.42$

c. $p(\geq 1)=1-p(X=0)=1-0{,}58^3\approx 0.80$

d. $E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+3\times p(X=3)$

$E(X)=\binom{3}{1}\times 0{,}42^1\times 0.58^2+2\times\binom{3}{2}\times 0{,}42^2\times 0.58^1+3\times 0{,}42^3\approx 1{,}24$

En moyenne, 1,24 personne sur 3 choisit l'effet coup de soleil.

Exercice 2 **10 x 0,5 / -0,25 par mauvaise réponse**

1. **b.** 3e(1−ln3)
2. **b.** $S=\{e^2\}$
3. **a.** a baissé de 4 %
4. **c.** $f'(x)=x\,(2\ln x+7)$
5. **c.**]0 ; e]
6. **c.** 3− ln2
7. **a.** e −1
8. **a.** Aucune solution
9. **b.** (u_n) est géométrique
10. **a.** Si on introduit A = 3 , alors M = 2 en sortie.

Exercice 3 (4 points)

Partie A

1. a. A (0 ; −4) étant un point de C_f, on a : $f(0)= -4$

b. La tangente T d'équation $y=ax+b$ passe par A(0 ; −4) et par B(2 ; −6)., on a donc :

$$\begin{cases} -4=b \\ -6=2\times a+b \end{cases}$$ ainsi : a = -1 et b = - 4 donc T : $y=-x-4$

Sachant que le coefficient directeur de la tangente en A (0 ; -4) est le nombre dérivé en 0, on a $f'(0)=-1$.

2. a. $f=uv$ donc $f'=u'v+uv'$ ainsi on a :

$f'(x)=1\times e^{bx}+(x+a)\times be^{bx}=[(1+b(x+a)]e^{bx}=(bx+ab+1)e^{bx}$

b. $f(0)=-4$ donc $ae^0=-4$ donc a = - 4

$f'(0)=-1$ donc $(-4b+1)e^0=-1$ donc $b={}^1/_2$

Partie B

1. D'après la partie A avec a = - 4 et $b = {}^{1}/_{2}$, on a :

$f'(x) = (0{,}5x - 2 + 1)e^{0.5x}$
$f'(x) = (0{,}5x - 1)e^{0.5x}$
$e^{0.5x}$ étant toujours positif sur ℝ., f' est du signe de $0{,}5x - 1$ ainsi f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2: +\infty[$

2. On considère la fonction *g* définie pour tout réel *x* par g(*x*) = *f*(*x*) + *x* + 4. On admet que la fonction g est croissante sur ℝ.

a. $g(0) = f(0) + 4 = 0$

g est la somme de deux fonctions strictement croissantes, c'est donc une fonction strictement croissante. Sachant qu'elle s'annule en 0, g est négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0: +\infty[$.

b. g(*x*) = *f*(*x*) – (*x* – 4) or T : $y = -x - 4$ ainsi :

- g est négative sur $]-\infty; 0]$; f est en dessous de sa tangente sur $]-\infty; 0]$
- g est positive sur $[0: +\infty[$; f est en dessous de sa tangente sur $[0: +\infty[$

__**Exercice 4**__ (4 points)

1.

$A = 3 + 4 = 7$ $\qquad B = \frac{e^{ln3}}{e^{ln4}} = \frac{3}{4}$ $\qquad C = e^{ln12} = 12$

$D = e^{\ln\left(\frac{5\times4}{3}\right)} = \frac{20}{3}$ $\qquad E = e^{ln8+ln5} = e^{ln40} = 40$ $\qquad F = ln16 - ln16 = 0$

2. Résoudre les équations ou inéquations suivantes

a) $e^{x+2} = 7$

$\Leftrightarrow x + 2 = ln7$

$\Leftrightarrow x = ln7 - 2$

b) $\mathrm{e}^{-3x+2} = -3$ n'a pas de solution car $\mathrm{e}^{-3x+2} > 0$ pour tout réel.

c) $-e^{-4x} + 1 = 3e^{-4x}$

$\Leftrightarrow 4e^{-4x} = 1$
$\Leftrightarrow e^{-4x} = {}^{1}/_{4}$
$\Leftrightarrow -4x = ln({}^{1}/_{4})$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-ln4}{-4} = \dfrac{2ln2}{4} = \dfrac{ln2}{2}$

d) $e^{x+2} < 7$
$\Leftrightarrow x + 2 < ln7$
$x < ln7 - 2$

e) $\ln(x - 2) = -5$ $\qquad E = \ ]2; +\infty[$
$\Leftrightarrow x - 2 = e^{-5}$
$\Leftrightarrow x = e^{-5} + 2$ donc $S = \{e^{-5} + 2\ \}$

f) $-2lnx \geq 5$ $\qquad E =]0; +\infty[$
$\Leftrightarrow lnx \leq {}^{-5}/_{2}$
$\Leftrightarrow x \leq e^{-5/2}$