

**La calculatrice est autorisée.**  
**Le sujet comporte un total de 4 exercices.**  
**Le barème est fourni à titre indicatif.**

**Exercice 1** (7 points) *d'après Liban mai 2012*

Dans un salon de coiffure pour femmes, le coloriste propose aux clientes qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires :

- une coloration naturelle à base de plantes qu'il appelle « couleur-soin »,
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, qu'il appelle « effet coup de soleil ».

Ce coloriste a fait le bilan suivant sur ces prestations :

- 40% des clientes demandent une « couleur-soin ».
- parmi celles qui n'en veulent pas, 30% des clientes demandent un « effet coup de soleil ».
- de plus, 24% des clientes demandent les deux à la fois.

On considère une de ces clientes.

On notera C l'évènement « la cliente souhaite une "couleur-soin" ».

On notera M l'évènement « la cliente souhaite un "effet coup de soleil" ».

1. Calculer la probabilité de « M sachant C » notée  $p_C M$ .
2. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.
3. Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « Effet coup de soleil ».
4. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à 0,42.
5. Calculer la probabilité de l'évènement  $(C \cup M)$  puis interpréter ce résultat.
6. Une « couleur-soin » coûte 35 euros et un « effet coup de soleil » coûte 40 euros.  
a. Recopier puis compléter sans justifier le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain en euros du coloriste par client :

$x_i$	75	40	35	0
$p_i$	0,24			0,42

- b. Donner l'espérance E de cette loi.
- c. Combien le coloriste doit-il facturer la réalisation d'un « effet coup de soleil » pour que l'espérance de gain par client augmente de 15%.

7. On choisit au hasard trois clientes parmi celles du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.

Soit X le nombre de clientes qui choisisse l'effet coup de soleil.

- a. Etablir la loi de probabilité suivie par X.
- b. Déterminer la probabilité qu'exactement une des clientes choisies ait choisi « effet coup de soleil » (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).
- c. Calculer la probabilité, qu'au moins une des trois clientes aient choisi l'effet coup de soleil.
- d. Déterminer l'espérance de cette loi et interpréter.



**Exercice 3** (4 points)

**Partie A**

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe  $C_f$  représente une fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels.

La tangente  $T$  à la représentation graphique  $C_f$  au point  $A(0; -4)$  passe par le point  $B(2; -6)$ .

On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

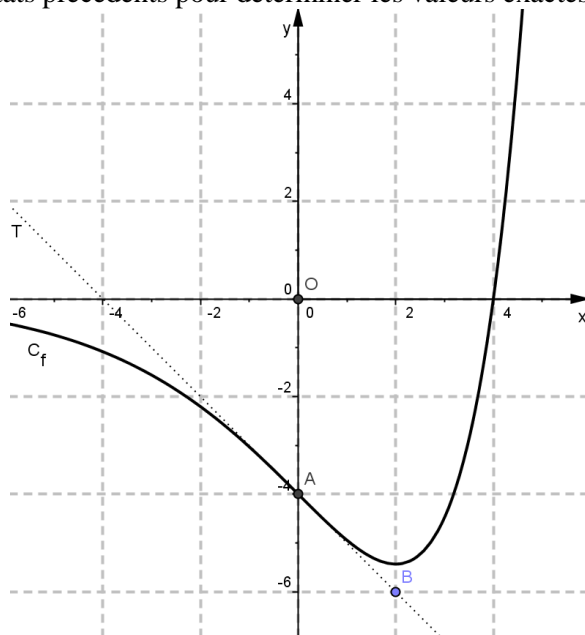
1. a. Donner la valeur  $f(0)$ .

b. Déterminer l'équation réduite de la droite  $(AB)$  et justifier que  $f'(0) = -1$ .

2. a. On admet qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel,  $f(x) = x + a e^{bx}$ .

Vérifier que  $f'(x) = bx + ab + 1 e^{bx}$ .

b. Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes de  $a$  et  $b$ .



**Partie B**

On considère maintenant la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = x - 4 e^{0.5x}$

1. Calculer  $f'(x)$ ; en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = f(x) + x + 4$ . On admet que la fonction  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

a. Calculer  $g(0)$  et en déduire le signe de  $g(x)$ .

b. Déterminer la position de la représentation graphique  $C_f$  par rapport à sa tangente  $T$ .

**Exercice 4** (4 points)

1. Simplifier les expressions suivantes

$$A = e^{\ln 3} + e^{\ln 4}$$

$$B = e^{\ln 3 - \ln 4}$$

$$C = e^{\ln 3 + \ln 4}$$

$$D = \exp(\ln 5 - \ln 2) + \ln 3$$

$$E = e^{3 \ln 2 + \ln 5}$$

$$F = 4 \ln 2 - 2 \ln 4$$

2. Résoudre les équations ou inéquations suivantes

a)  $e^{x+2} = 7$

b)  $e^{-3x+2} = -3$

c)  $-e^{-4x} + 1 = 3e^{-4x}$

d)  $e^{x+2} < 7$

e)  $\ln(x-2) = -5$

f)  $-2 \ln x \geq 5$