

**La calculatrice est autorisée.**  
**Le sujet comporte un total de 4 exercices.**  
**Le barème est fourni à titre indicatif.**

**EXERCICE 1** (6 points)

Une boîte contient deux dés : un dé rose cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé vert dont deux faces portent le numéro 6 et les autres le numéro 2.

On choisit un dé au hasard dans la boîte, puis on lance ce dé. Le dé rose a deux fois plus de chance d'être choisi que le dé vert.

On note :

- R l'événement « le dé est rose »
- S l'événement « on obtient 6 au lancer du dé »

1. a. Décrire la situation par un arbre pondéré  
b. Calculer la probabilité d'avoir choisi le dé rose et obtenu un six.  
c. Calculer la probabilité d'obtenir un six quel que soit le dé choisi.  
d. On a obtenu un six. Calculer la probabilité que le dé soit vert.

2. On relance le dé choisi une deuxième fois.
  - a. Prolonger l'arbre précédent.
  - b. Calculer la probabilité d'avoir choisi le dé rose et d'avoir obtenu deux fois le six.
  - c. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois le six quel que soit le dé choisi.
  - d. Sachant qu'on a obtenu deux fois le six, calculer la probabilité que le dé soit vert.

3. On relance n fois le dé choisi.  
Montrer que la probabilité d'obtenir n fois un six est :

$$p_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4. a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir le dé vert sachant qu'on a obtenu n fois un six.  
b. Montrer que la probabilité d'obtenir le dé vert et n fois un six est :

$$q_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- c. Déterminer par un calcul, la plus petite valeur de n telle que  $q_n \leq 0,001$ .

### **EXERCICE 2** (4 points)

Sur une portion de 6 kilomètres de boulevard périphérique parisien, le trafic peut être perturbé entre 7h et 11h du matin.

Au début de cette portion, un panneau lumineux indique à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.

On modélise l'évolution du trafic à l'aide d'une fonction  $f$  définie sur  $[1 ; 5]$  par :

$$f(t) = 8 \times e \times \frac{\ln t}{t} + 4 .$$

Le nombre  $f(t)$  est le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant  $t$  exprimé en heure.

Il est 7h du matin à l'instant  $t = 1$ .

Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres et « perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

- 1. a.** Etudier les variations de  $f$  sur  $[1 ; 5]$  et dresser son tableau de variations.
- b.** En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7h 10min et qu'il ne l'est plus jusqu'à 11h.

**2.** Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1 ; 5]$  par :

$$g(t) = (\ln t)^2$$

- a.** Calculer  $g'(t)$  et en déduire une primitive de  $f$  sur  $[1 ; 5]$
- b.** Calculer, à une minute près, la valeur moyenne du temps nécessaire pour parcourir les 6 km entre 7h et 11h du matin.

### **EXERCICE 3** (6 points)

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$  par

$$f(x) = 18 \ln x - x^2 + 16x - 15.$$

Si  $x$  représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que  $f(x)$  représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.

On suppose que  $f$  est dérivable sur  $[0,5 ; 25]$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

#### **PARTIE A**

**1.** Calculer  $f'(x)$ .

Vérifier que, pour tout nombre  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ , on a

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x} .$$

**2.** Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ . En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ .

**3. a.** Calculer  $f(1)$ .

**b.** Montrer que sur l'intervalle  $[18 ; 19]$  l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ . Déterminer une valeur approchée par défaut de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**c.** En déduire le signe de  $f(x)$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ .

**4.** Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?

**5.** L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 ? Justifier la réponse.

## PARTIE B

1. On admet que la fonction  $G$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $G(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
En déduire une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0,5 ; 25]$ .

2. Déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.

### Exercice 4 (6points)

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20% par jour à cause de la chaleur. Soit  $D_n$  le débit en  $m^3$  pour le  $n$ -ième jour après le 1<sup>er</sup> juin.

Pour la journée du 1<sup>er</sup> juin, le débit  $D_0$  est égal à  $300 m^3$  par jour.

On arrondira les résultats au dixième de mètre cube près.

- Calculer le débit  $D_1$  pour le 2 juin.
  - Exprimer  $D_{n+1}$  en fonction de  $D_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(D_n)$ ?
  - Exprimer  $D_n$  en fonction de  $n$ . Calculer le débit  $D_{29}$  pour la journée du 30 juin.
  - Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin.
- A partir du 1<sup>er</sup> juillet, le débit du ruisseau peut-être considéré comme nul (inférieur à  $0,5 m^3$  par jour). La chaleur provoque, dans la retenue, une évaporation de 4% du volume total de l'eau par jour. De plus on doit libérer de la retenue  $500 m^3$  d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse. Le 1<sup>er</sup> juillet au matin, la retenue contient  $V_0 = 100\,000 m^3$ .  
Soit  $V_n$  le volume d'eau au  $n$ -ième matin après le 1<sup>er</sup> juillet.
  - Montrer que  $V_1 = 95\,500 m^3$
  - Exprimer  $V_{n+1}$  en fonction de  $V_n$ .
- On considère la suite de terme général  $U_n$  définie, pour tout entier  $n$ , par  $U_n = V_n + 12500$   
Montrer que la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme  $U_0$ .
- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer  $V_{31}$  le volume restant au matin du 1<sup>er</sup> août.
- A quelle date la retenue sera-t-elle à sec ? justifier le résultat.