.

Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminale ES3
Année 2011-2012		Mathématiques
Mardi 20 mars 2012	Durée : 3 heures	DTL N°4

La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 4 exercices.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 (7 points) *Centres étrangers juin 2011*

Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.
Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture.
Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture. Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à confiture, la probabilité qu'il demande une barquette de myrtilles est de 0,3 et la probabilité qu'il demande une barquette de groseilles est de 0,5.
Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à déguster, il ne demande jamais des groseilles et demande des framboises dans 60% des cas.
Un client achète une barquette. On notera :
– C l'évènement « le client achète une barquette de fruits à confiture »,
– F l'évènement « le client demande des framboises »,
– G l'évènement « le client demande des groseilles »,
– M l'évènement « le client demande des myrtilles ».

1. Faire un arbre pondéré avec les données de l'énoncé.
On complétera l'arbre avec les réponses obtenues dans les questions suivantes.

2. a. Calculer la probabilité que le client demande des framboises sachant qu'il achète une barquette de fruits à confiture.
b. Le client achète une barquette de fruits à déguster ; quelle est la probabilité qu'il demande des myrtilles ?

3. Montrer que la probabilité que le client achète une barquette de framboises est égale à 0,24.

4. Le client achète une barquette de framboises. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de fruits à confiture ?

5. Le producteur vend 5 euros la barquette de fruits à confiture, quel que soit le fruit, 2 euros la barquette de framboises à déguster et 3 euros la barquette de myrtilles à déguster ;
a. On note x_i les valeurs possibles, en euros, du gain du producteur par barquette vendue et p_i leur probabilité. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi du gain du producteur par barquette vendue. On justifiera les réponses.

Valeur : x_i	5	2	3
Probabilité associée : p_i			

b. Calculer l'espérance de cette loi de probabilité.
c. Déterminer le gain en euros que le producteur peut espérer pour 150 barquettes vendues ?

6. On interroge au hasard et de façon indépendante n acquéreurs parmi tous les clients de ce producteur. Soit Y le nombre de clients qui achète une barquette de framboises.
a. Etablir la loi de probabilité suivie par Y.
b. Déterminer la probabilité p_n qu'au moins un client parmi n achète une barquette de framboises.
c. Déterminer le plus petit n pour lequel : $1-0,76^n \geq 0,95$. Interpréter le résultat.

<u>Exercice 2</u> *(8,5 points)*

Partie A

Soit la fonction g définie par :

$$g\left(x\right)=e^x-2x$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction g.
2. Calculer les limites de la fonction g aux bornes de son domaine de définition.
3. Etudier les variations de la fonction g.
4. En vous aidant de la question précédente, montrer que la fonction g prend des valeurs strictement positives sur son domaine de définition.

Partie B

On considère maintenant la fonction *f* définie par :

$$f\left(x\right)=\frac{e^x}{g\left(x\right)}=\frac{e^x}{e^x-2x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

5. En vous aidant de la question 4, donner le domaine de définition de la fonction *f*.
6. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son domaine de définition et montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales dont on donnera des équations. Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à chacune de ses asymptotes.
7. Montrer que la dérivée de la fonction *f* est définie par :

$$f\,'\left(x\right)=\frac{2e^x\left(1-x\right)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

8. Etudier les variations de la fonction *f*.
9. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.
10. Donner l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
11. Donner, en fonction de la valeur du réel *k*, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ (aucune justification n'est demandée).
12. Tracer, sur un même graphique, $\mathscr{C}_f$, les deux asymptotes horizontales et la tangente $\mathscr{T}_0$ (unité graphique : 2 cm).

Exercice 3 *(3,5points)*

a. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation :
$x^2 - 4x - 5 = 0$

b. En déduire les solutions des équations suivantes après avoir déterminé le domaine de validité de *x* et transformé l'équation :

1/ $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln 2$

2/ $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$

3/ $e^x - 4 = 5e^{-x}$

Exercice 4 *(3points)*

Pour chaque question proposée, une seule réponse est exacte. Toute bonne réponse indiquée rapporte 0,5pt et toute mauvaise réponse fait perdre 0,25pt. Une question sans réponse vaut 0.

1. *u* est la fonction définie sur IR par : $u(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$.

Une primitive *U* de *u* sur IR est définie par :

a) $U(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$

b) $U(x) = 2\ln(x^2 + 2x + 3)$

c) $U(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + 4$

2. Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

3. Pour tout réel x, le nombre $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}$ est égal à :

a) $-\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 2}$ **c)** $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$

4. Soit f la fonction définie sur $]0 ;+\infty[$ par : $f(x) = 2\ln x - 3x + 5$.

Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a) $y = -x + 1$ **b)** $y = 2x - 3$ **c)** $y = -x + 3$

5. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \ln(0,3) - 1 \leq 0$ est :

a) $]-\infty ; \dfrac{1}{\ln(0,3)}]$ **b)** $[\dfrac{1}{\ln(0,3)} ; +\infty[$ **c)** $]0 ; \dfrac{1}{\ln(0,3)}]$

6. Si $f(x) = e - x + \ln x$, alors

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2e$