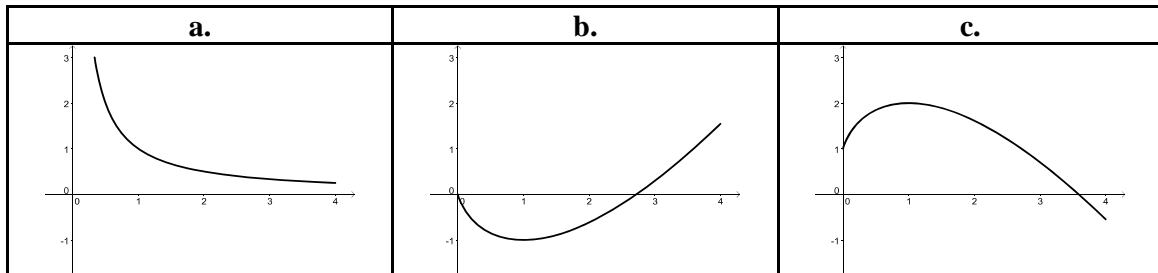




4. La fonction  $g$  est définie sur l'intervalle  $]0; 4]$  par  $g(x) = \ln x$ . Parmi les trois courbes suivantes, laquelle représente une primitive de la fonction  $g$  ?



5. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-\infty; e[$  par  $f(x) = \ln(e - x)$ .

On suppose  $f$  dérivable sur  $]-\infty; e[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  $f'(0)$  est égal à :

- a.  $-1$                       b.  $\frac{1}{e}$                       c.  $-\frac{1}{e}$                       d.  $1$

6. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +1[$  par  $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{x}$ .

On considère une fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +1[$  telle que, pour tout  $x > 0$ , on ait  $0 < g(x) < f(x)$ .

La limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$  est :

- a.  $-\infty$                       b.  $0$                       c.  $+\infty$                       d. On ne peut pas savoir.

7. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +1[$  par  $f(x) = 3x + 1 + \frac{e^x}{x^3}$ .

Soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.

La courbe  $(C_f)$  :

- a. admet comme asymptote la droite d'équation  $x = 0$ .  
 b. admet comme asymptote la droite d'équation  $y = 3x + 1$ .  
 c. admet comme asymptote la droite d'équation  $y = 0$ .  
 d. n'admet pas de droite asymptote.

8. On note  $\exp$  la fonction exponentielle.

Soit  $u$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $u(0) = 1$ ,  $u(1) = 0$  et  $u(e) = 2$ . Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = u[\exp(x)]$ .

$f(0)$  est égal à :

- a.  $0$                       b.  $1$                       c.  $2$                       d.  $e$

9. L'égalité  $\ln[\exp(x)] = x$  :

- a. n'est vraie que pour tout réel  $x$  strictement positif.
- b. est vraie pour tout réel  $x$ .
- c. n'est jamais vraie.
- d. n'est vraie que pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1

10. L'égalité  $\exp[\ln(x)] = x$  est vraie pour tout réel  $x$  appartenant à :

- a.  $]0; +\infty[$
- b.  $\mathbb{R}$
- c.  $]0; +\infty[$
- d.  $[-1; +\infty[$

11. On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :

- a.  $\frac{1}{4}$
- b.  $\frac{15}{16}$
- c.  $\frac{1}{16}$
- d.  $\frac{1}{8}$

12. Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , d'expression :  $f(x) = 3e^{2x} - x + 1$ .

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0 est :

- a.  $y = 2x + 4$
- b.  $y = 6x + 4$
- c.  $y = 5x + 4$
- d.  $y = 5x - 4$

13. On considère l'inéquation :  $\ln(3-x) \leq 0$ . Elle admet pour ensemble de solutions :

- a.  $]0; 3]$
- b.  $[2; 3[$
- c.  $[2; +\infty[$
- d.  $]0; 2]$

14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(-2 + \frac{1}{x}\right)}$  est égale à :

- a. 0
- b.  $+\infty$
- c.  $e^{-2}$
- d.  $-\infty$

15. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ .

Sa courbe représentative admet :

- a. une unique asymptote. Elle est parallèle à l'axe des abscisses.
- b. une unique asymptote. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées.
- c. deux asymptotes.
- d. aucune asymptote.

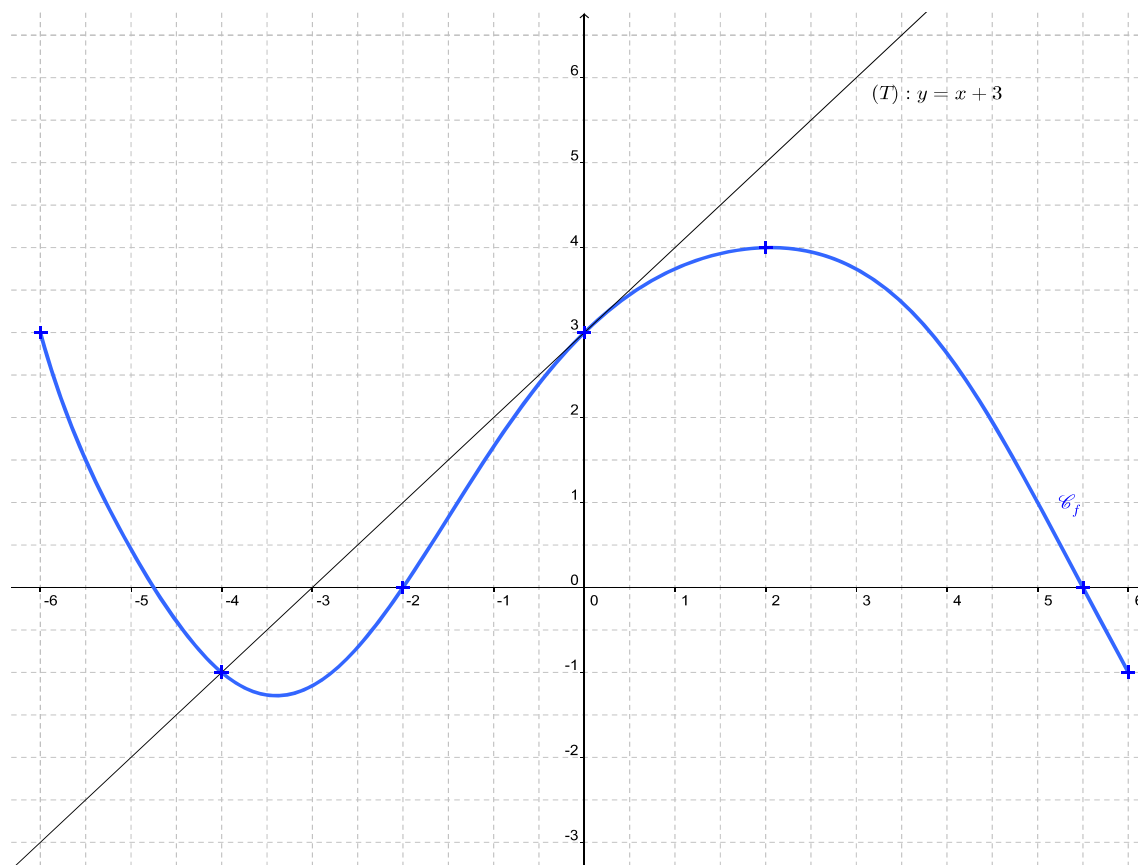
16. Soit  $h$  la fonction définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  d'expression :  $h(x) = 2\ln(x) - x$ .

Soit  $h'$  la fonction dérivée de  $h$  sur  $]0; +\infty[$ . Alors l'expression de  $h'$  est :

- a.  $h'(x) = \frac{2-x}{x}$
- b.  $h'(x) = \frac{2}{x} - x$
- c.  $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$
- d.  $h'(x) = \frac{2}{x} + 1$

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal du plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  représentative d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-6; 6]$ .

La droite  $(T)$  d'équation  $y = x + 3$  est tangente à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point I de coordonnées  $(0; 3)$ .



17. Le nombre dérivé de  $f$  en 0 est :

- a. 0                      b. 1                      c. 3

18. On pose  $J = \int_{-1}^0 f(x) dx$ . On peut affirmer que :

- a.  $-2 < J < 0$               b.  $0 < J < 2$               c.  $2 < J < 4$               d.  $-4 < J < -2$

19. On appelle  $F$  une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[-6; 6]$ .

- a.  $F$  est croissante sur l'intervalle  $[-3; 2]$  ;  
 b.  $F$  est décroissante sur l'intervalle  $[-1; 5]$  ;  
 c.  $F$  est croissante sur l'intervalle  $[-1; 5]$ .

20. On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[-6; 6]$  par :  $g(x) = \exp[f(x)] = e^{f(x)}$

On peut affirmer que :

- la fonction  $g$  a les mêmes variations que  $f$  sur l'intervalle  $[-6; 6]$ .
- la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[-6; 6]$ .
- la fonction  $g$  a les variations inverses de celles de  $f$  sur l'intervalle  $[-6; 6]$ .

|           |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Questions | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Réponses  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

|           |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Questions | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Réponses  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

**EXERCICE 2** (5 points) *d'après Centres Etrangers – Juin 2011*

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre d'internautes en Chine de 2002 à 2009. Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 2000.

|   |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Année                                       | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
| Rang de l'année $x_i$                       | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| Nombre d'internautes $y_i$<br>(en millions) | 60   | 70   | 95   | 100  | 140  | 160  | 250  | 385  |

On cherche à étudier l'évolution du nombre d'internautes en fonction du rang  $x$  de l'année.

- Calculer le taux d'évolution de ce nombre d'internautes entre 2002 et 2009. On donnera le résultat à 0,1 près.
- Représenter sur votre copie le nuage de points  $M(x_i; y_i)$  associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques :
  - Sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 1 an ;
  - Sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 20 millions d'internautes (en plaçant 50 à l'origine).

3. On cherche dans un premier temps un ajustement affine.
- a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients arrondis à l'unité). Tracer cette droite sur le graphique précédent.
  - b. En supposant que cet ajustement reste valable pour l'année suivante, donner une estimation, arrondie au million, du nombre d'internautes en Chine en 2010.
  - c. Une étude récente a montré qu'au 1er mai 2010, on a dépassé les 400 millions d'internautes en Chine. On envisage donc un ajustement exponentiel et on pose  $z = \ln(y)$ .

- o Recopier et compléter le tableau en arrondissant les valeurs de  $z_i$  au millième :

|                  |       |   |   |   |   |   |   |   |
|------------------|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$            | 2     | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $z_i = \ln(y_i)$ | 4,094 |   |   |   |   |   |   |   |

- o Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $z$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients arrondis au millième).
- o En déduire une expression de  $y$  en fonction de  $x$ .
- o En prenant l'approximation  $y \approx 32,5 \times e^{0,253x}$  en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation, arrondie au million, du nombre d'internautes en 2012.

**EXERCICE 3** (5 points) *D'après Amérique du Nord – Juin 2010*

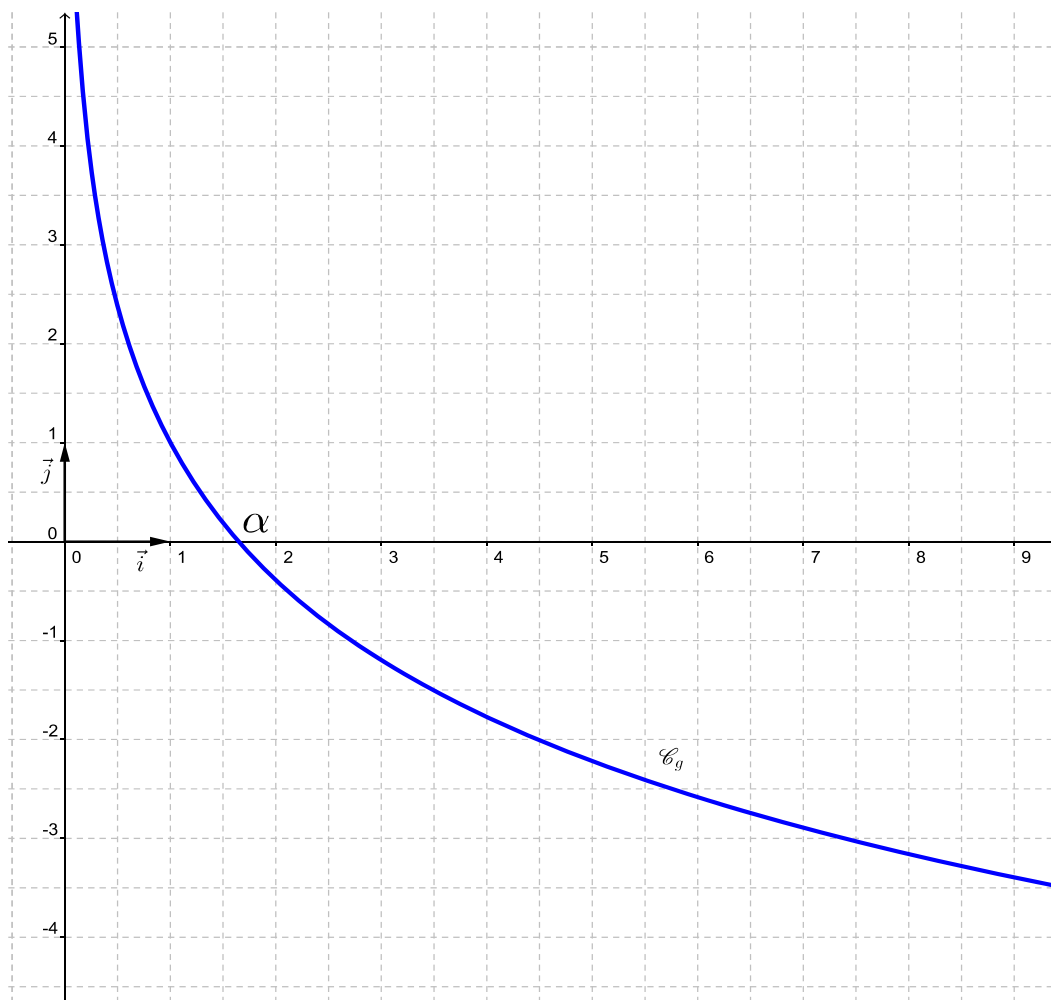
**Partie A – Etude préliminaire**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 1 - 2\ln(x)$$

On donne ci-dessous sa courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Cette courbe  $\mathcal{C}_g$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $\alpha$ .



1. Déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .
2. On admet que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Donner, en justifiant, le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

### Partie B – Etude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on rappelle on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ).

On admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

2. a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

b. Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3. a. Montrer que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = \left[ \ln(x) + \frac{1}{2} \right]^2$  est une primitive de la fonction  $f$  sur cet intervalle.

b. Soit  $I = \int_1^5 f(x) dx$ . Déterminer la valeur exacte de  $I$  puis en déterminer une valeur approchée au centième près.

### Partie C – Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile.  
Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction  $f$  définie dans la partie B, avec  $x$  exprimé en milliers de pièces et  $f(x)$  exprimé en euros.

1. Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1000 et 5000 pièces.
2. *Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05€ ?