CORRIGE

Exercice 1

Soit un graphe non ordonné d'ordre N comportant N_i sommets de degré impair et N_p sommets de degré pair.

On sait que la somme S des degrés des sommets est un nombre pair (cette somme est égale à deux fois le nombre total d'arêtes, cf. le cours).

La somme S_p des degrés des N_p sommets de degré pair est un nombre pair (une somme quelconque de nombres pairs est encore un nombre pair).

La somme S_i des degrés des N_i sommets de degré impair est :

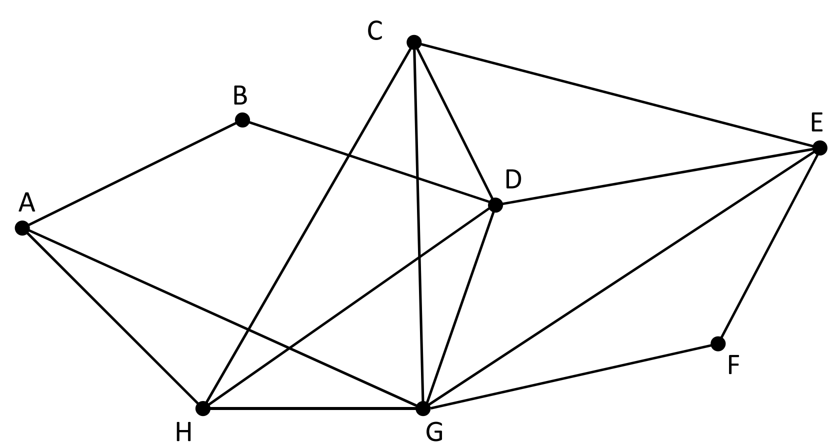
- Paire si N_i est pair.
- Impaire si N_i .est impair.

Ainsi, si on suppose que N_i est impair, on a S_i impaire. Mais alors $S = S_i + S_p$ est impaire (somme de deux entiers de parités différentes), ce qui est absurde.

Un graphe non orienté ne peut avoir un nombre impair de sommets de degrés impairs.

Exercice 2

On considère le graphe non orienté suivant :



1. Le graphe considéré est connexe car on peut relier entre eux deux sommets quelconques par une chaîne (ce type de question ne requiert pas de justification complexe et a pour but de vérifier que vous connaissez en fait la définition de la connexité …).

2. On obtient facilement :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On donne :

$$D = M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 5 & 7 & 2 & \boxed{11} & 9 \\ 6 & \boxed{0} & 5 & 8 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 10 & 12 & 12 & 5 & 15 & 12 \\ 5 & 8 & 12 & 10 & 13 & 5 & 17 & 14 \\ 7 & 3 & 12 & 13 & 8 & 7 & 13 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 2 & 9 & 6 \\ 11 & 4 & 15 & 17 & 13 & 9 & 14 & 13 \\ 9 & 3 & 12 & 14 & 8 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

On a (cf. les coefficients encadrés ci-dessus) :

- $d_{22} = 0$. Il n’existe donc pas de chaîne de longueur 3 reliant le sommet B à lui-même.
- $d_{17} = 11$. Il existe donc 11 chaînes de longueur 3 reliant le sommet A au sommet G.

4. Le sommet C est le troisième sommet et le sommet F est le sixième sommet. Le coefficient d_{36} de la matrice D vaut 5. Il existe donc 5 chaînes de longueur 3 reliant le sommet C au sommet F.

On obtient :

C – D – E – F
C – D – G – F
C – E – G – F
C – G – E – F
C – H – G – F

5. On détermine les degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	2	4	5	4	2	6	4

Le graphe comporte exactement <u>deux</u> sommets de degré impair (A de degré 3 et D de degré 5), il admet donc des chaînes eulériennes.

Une telle chaîne admet nécessairement pour origine le sommet A (respectivement D) et pour extrémité le sommet D (respectivement A).

Appliquons l’algorithme d’Euler :

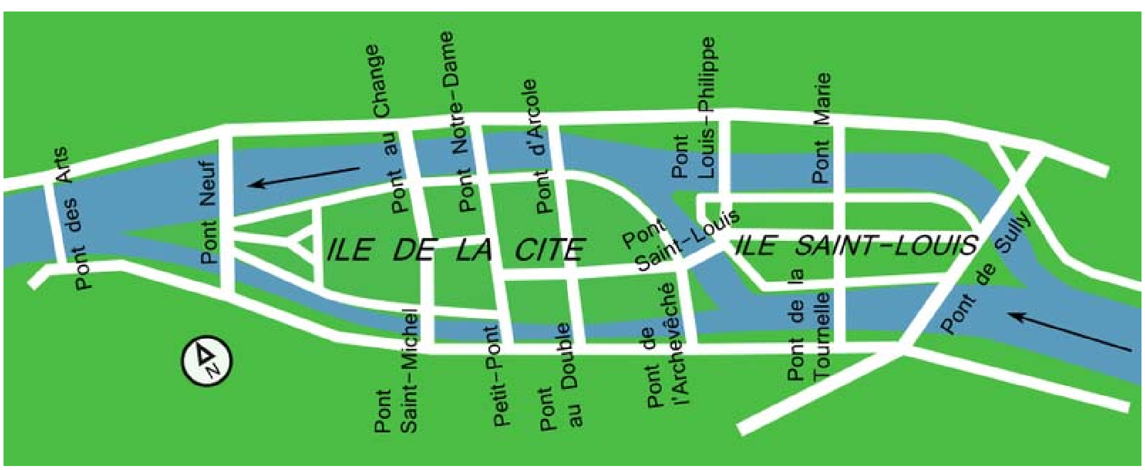
Cycles	Chaînes
	A – H – D
A – B – D – G – A	A – B – D – G – A – **H** – D
H – C – G – H	A – B – D – G – A – H – **C** – G – H – D
C – D – E – C	A – B – D – G – A – H – C – D – **E** – C – G – H – D
E – G – F – E	A – B – D – G – A – H – C – D – E – G – F – E – C – G – H – D

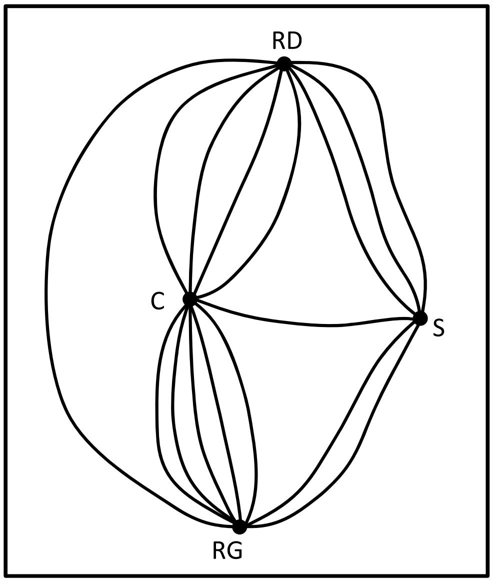
Une chaîne eulérienne du graphe fourni est :

A – B – D – G – A – H – C – D – E – G – F – E – C – G – H – D

6. Un graphe non orienté connexe admet un cycle eulérien si les degrés des sommets sont tous pairs. Ce n’est pas le cas ici et le graphe n’admet donc pas de cycle eulérien.
En rajoutant une arête entre les sommets de degré impair A et D, on obtient un nouveau graphe dont tous les sommets sont de degré pair : le nouveau graphe admet un cycle eulérien.

Exercice 3





1. Seuls les ponts et les principales « zones » importent (cf. le problème historique des ponts de Königsberg). Nous pouvons donc représenter la situation à l'aide d'un graphe non orienté comportant 4 sommets :
   - RD correspondant à la rive droite.
   - RG correspondant à la rive gauche.
   - C correspondant à l'île de la Cité.
   - S correspondant à l'île Saint-Louis.

   Chaque pont est alors représenté par une arête.

2. Dans cette question, le problème est le suivant : peut-on parcourir, en partant du sommet RG, une fois et une seule toutes les arêtes du graphe et revenir au sommet de départ ? En d'autres termes, le graphe admet-il un cycle eulérien ? (le sommet de départ, qui sera également le sommet de retour, importe alors nullement)

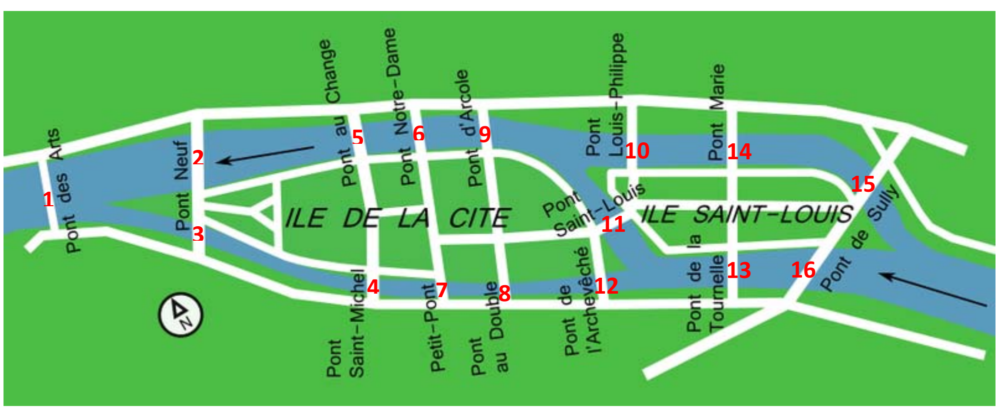
   Pour pouvoir répondre à cette question, nous commençons par déterminer les degrés des différents sommets du graphe. On obtient facilement :

Sommet	RD	RG	C	S
Degré	8	8	10	6

Tous les sommets étant de degré pair, le théorème d'Euler nous permet d'affirmer que le graphe admet des cycles eulérien, en particulier d'origine (et extrémité) le sommet RG.

A partir du sommet origine (RG), on peut emprunter n'importe quelle arête, soit n'importe quel pont. Nous pouvons, par exemple, suggérer la promenade suivante (nous conservons, pour des raisons d'économie de place, les notations RD, RG, C et S) :

RG – Pont des Arts – RD – Pont Neuf – C – Pont Neuf – RG – Pont Saint-Michel – C – Pont au Change – RD – Pont Notre-Dame – C – Petit-Pont – RG – Pont au Double – C – Pont d'Arcole – C – Pont Louis-Philippe – S – Pont Saint-Louis – C – Pont de l'Archevêché – RG – Pont de la Tournelle – S – Pont Marie – RD – Pont de Sully – S – Pont de Sully – RG.



3. Dans cette dernière question on considère un nouveau graphe, obtenu à partir du premier en supprimant l'arête reliant les sommets RD et RG. Ces deux sommets sont, dans le nouveau graphe, de degré 7. Ainsi, le nouveau graphe admet exactement deux sommets de degré impair.

   D'après le théorème d'Euler, on peut donc affirmer que le nouveau graphe admet des chaînes eulériennes (pas de cycle eulérien) d'origine et d'extrémité les sommets RG et RD.

   Ainsi, on peut parcourir le graphe en empruntant toutes les arêtes une fois et une seule. On partira de RG (respectivement RD) et on arrivera en RD (respectivement RG). Steffi GRAF achèvera donc nécessairement sa promenade rive droite et, si elle ne souhaite pas repasser par un des ponts, devra emprunter le métro (ou le bus !) pour rejoindre son hôtel.