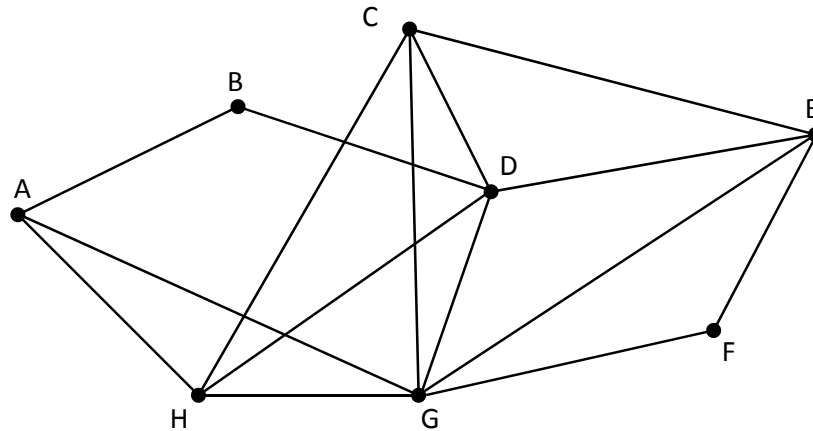


**Exercice 1**

Pourquoi un graphe non orienté ne peut-il avoir un nombre impair de sommets de degrés impairs ?

**Exercice 2**

On considère le graphe non orienté suivant :



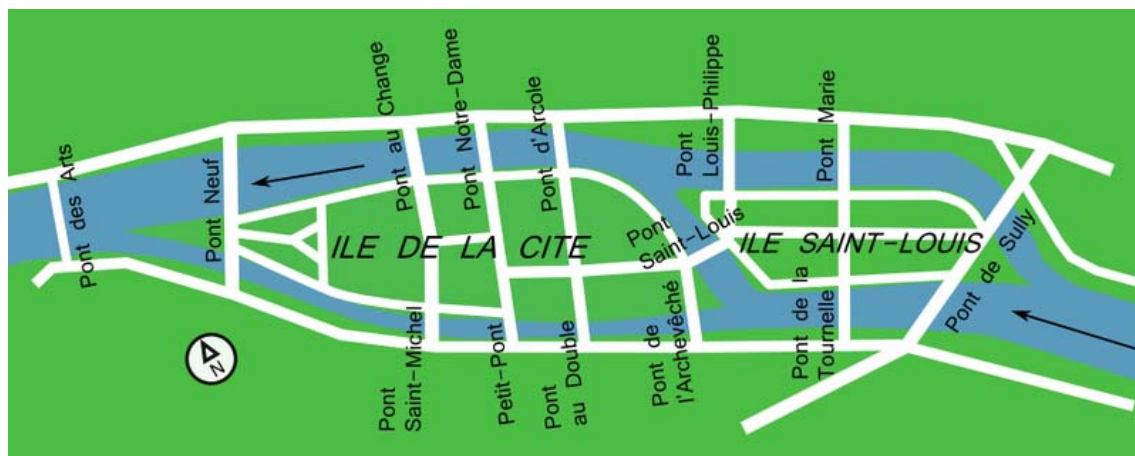
1. Le graphe est-il connexe ? (Justifier)
2. Déterminer la matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe (les sommets seront considérés dans l'ordre alphabétique).
3. On donne :

$$D = M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 5 & 7 & 2 & 11 & 9 \\ 6 & 0 & 5 & 8 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 10 & 12 & 12 & 5 & 15 & 12 \\ 5 & 8 & 12 & 10 & 13 & 5 & 17 & 14 \\ 7 & 3 & 12 & 13 & 8 & 7 & 13 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 2 & 9 & 6 \\ 11 & 4 & 15 & 17 & 13 & 9 & 14 & 13 \\ 9 & 3 & 12 & 14 & 8 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

Interpréter les valeurs des coefficients  $d_{22}$  et  $d_{17}$  de la matrice  $D$ .

4. Citer toutes les chaînes de longueur 3 reliant le sommet  $C$  au sommet  $F$ .
5. Pourquoi ce graphe admet-il des chaînes eulériennes ? Déterminer l'une de ces chaînes (on utilisera l'algorithme d'Euler).
6. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? (Justifier)  
Quelle arête peut-on ajouter à ce graphe de telle sorte que le nouveau graphe ainsi obtenu admette un cycle eulérien ?

### Exercice 3



Le plan ci-dessus donne une représentation des îles de la Seine au centre de Paris (île de la Cité et île Saint-Louis) ainsi que des ponts permettant d'y accéder à partir de la rive gauche (Pont Neuf, Pont Saint-Michel, Petit-Pont, Pont au Double, Pont de l'Archevêché, Pont de la Tournelle et Pont de Sully), à partir de la rive droite (Pont Neuf, Pont au Change, Pont Notre-Dame, Pont d'Arcole, Pont Louis-Philippe, Pont Marie et Pont de Sully) ou entre elles (Pont Saint-Louis).

Le plan fait également apparaître (sur la gauche) un pont reliant la rive droite et la rive gauche : le Pont des Arts.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe (les arêtes correspondant aux ponts du plan).
2. Steffi GRAF (on se demande bien pourquoi je l'ai choisie ! 😊), ancienne mais néanmoins célèbre championne de tennis allemande, est en vacances à Paris et séjourne dans un hôtel de la rive gauche. Adorant marcher, elle a sous les yeux le plan ci-dessus et, sortant de son hôtel, se dirige vers la Seine en se demandant si elle pourrait rentrer à son hôtel en fin de journée après avoir franchi une fois et une seule tous les ponts apparaissant sur le plan.

Sauriez-vous l'aider ? (Si une telle promenade est possible, soyez gentil de lui préciser sur votre copie le chemin qu'elle pourrait emprunter)

Le premier pont emprunté a-t-il de l'importance ?

3. Ravie de sa promenade de la veille, elle décide, le lendemain, de recommencer mais en franchissant d'abord le Pont des Arts, qui lui a particulièrement plu (je la comprends !). Faisant part de son projet, lors du petit déjeuner, au directeur de l'hôtel, celui-ci l'informe que le Pont des Arts vient d'être fermé pour une durée indéterminée pour cause de travaux. Positive, Steffi GRAF, maintient son projet (emprunter tous les ponts une fois et une seule). Elle ne passera pas par le Pont des Arts. C'est tout. Le directeur de l'hôtel, matheux à ses heures perdues, lui suggère alors d'acheter un ticket de métro pour le retour.

Sauriez-vous expliquer la suggestion du directeur de l'hôtel ?