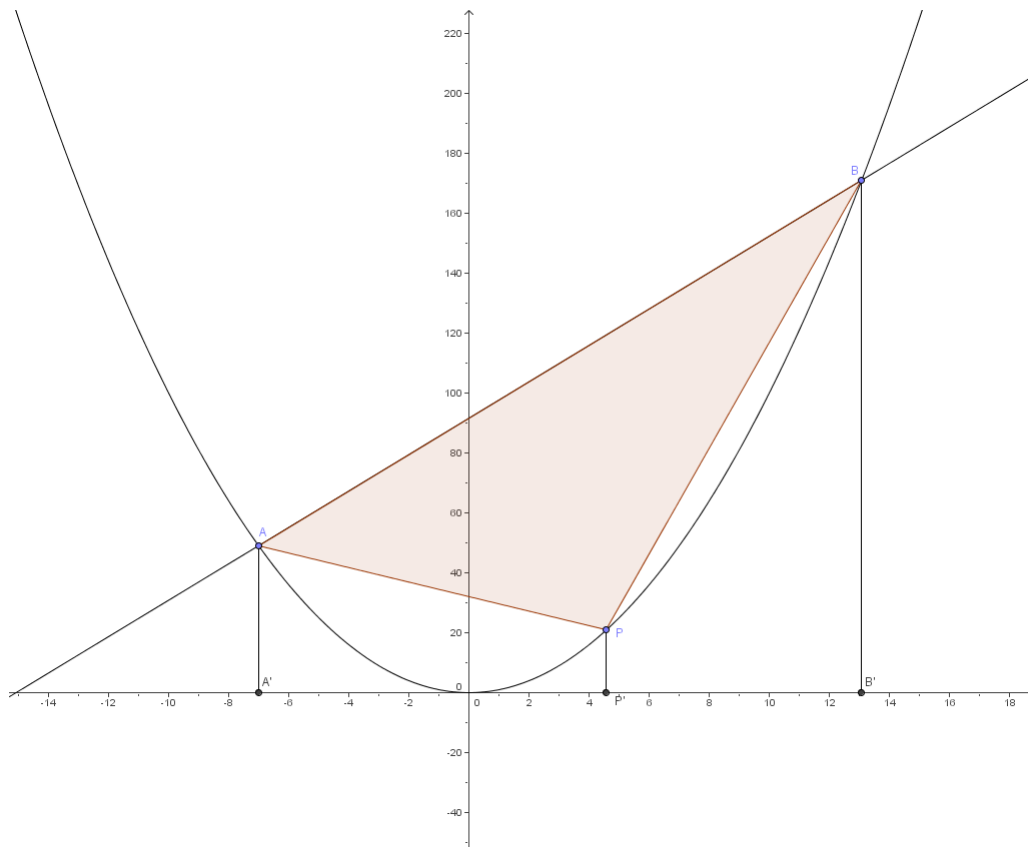


N°120 page 87

Corrigé

1^{ère} approche

Dans cette première approche, nous considérons les projetés orthogonaux des points A, B et P sur l'axe des abscisses. Nous les notons respectivement A', B' et P' (voir la figure ci-après. On notera que l'on a, sur cette première figure, volontairement choisi des unités différentes sur les axes pour rendre l'ensemble plus lisible).



Les quadrilatères : $ABB'A'$, $APP'A'$ et $P'PBB'$ sont des trapèzes rectangles dont nous notons les aires respectivement : $\mathcal{A}(ABB'A')$, $\mathcal{A}(APP'A')$ et $\mathcal{A}(P'PBB')$.

Si nous notons $\mathcal{A}(ABP)$ l'aire du triangle ABP , nous avons :

$$\mathcal{A}(ABB'A') = \mathcal{A}(ABP) + \mathcal{A}(APP'A') + \mathcal{A}(P'PBB')$$

Soit :

$$\mathcal{A}(ABP) = \mathcal{A}(ABB'A') - \mathcal{A}(APP'A') - \mathcal{A}(P'PBB')$$

Notons a l'abscisse des points A et A', b celle des points B et B' et, enfin, x celle des points P et P' (x varie donc dans l'intervalle $[a, b]$).

Les points A, P et B étant des points de la parabole d'équation $y = x^2$, on a facilement :

$$AA' = a^2, BB' = b^2 \text{ et } CC' = x^2.$$

Par ailleurs : $AB' = b - a$, $AP' = x - a$ et $P'B' = b - x$.

Il vient alors :

$$\mathcal{A}(ABB'A') = \frac{AA' + BB'}{2} \times AB' = \frac{a^2 + b^2}{2} \times (b - a)$$

$$\mathcal{A}(APP'A') = \frac{AA' + PP'}{2} \times AP' = \frac{a^2 + x^2}{2} \times (x - a)$$

$$\mathcal{A}(P'PB'B') = \frac{PP' + BB'}{2} \times P'B' = \frac{x^2 + b^2}{2} \times (b - x)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABP) &= \mathcal{A}(ABB'A') - \mathcal{A}(APP'A') - \mathcal{A}(P'PB'B') \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2} \times (b - a) - \frac{a^2 + x^2}{2} \times (x - a) - \frac{x^2 + b^2}{2} \times (b - x) \\ &= \frac{1}{2} \left[(a^2 + b^2) \times (b - a) - (a^2 + x^2) \times (x - a) - (x^2 + b^2) \times (b - x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-(b - a)x^2 + (b^2 - a^2)x - ab^2 + ba^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-(b - a)x^2 + (b - a)(b + a)x - ab(b - a) \right] \\ &= -\frac{1}{2}(b - a) \left[x^2 - (b + a)x + ab \right] \\ &= -\frac{1}{2}(b - a)(x - a)(x - b) \end{aligned}$$

Notons alors : $\mathcal{A}(ABP) = \mathcal{A}(x) = -\frac{1}{2}(b - a) \left[x^2 - (b + a)x + ab \right]$.

Il s'agit d'une fonction polynôme et : $\mathcal{A}'(x) = -\frac{1}{2}(b - a) \left[2x - (b + a) \right]$.

Il vient alors :

- Si $x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right[$, $\mathcal{A}'(x) > 0$;
- $\mathcal{A}'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$;
- Si $x \in \left] \frac{a+b}{2}, b \right]$, $\mathcal{A}'(x) < 0$.

On en déduit que la fonction \mathcal{A} admet un maximum pour $x = \frac{a+b}{2}$. Géométriquement, le point P' est le milieu du segment $[A', B']$.

Les points $A(a, a^2)$ et $B(b, b^2)$ sont les points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = mx + p$. Les réels a et b sont donc les solutions de l'équation du second degré : $x^2 = mx + p$, soit $x^2 - mx - p = 0$.

Or, on a aussi : $x^2 - mx - p = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$.

Par identification, on obtient : $a + b = m$.

L'abscisse du point P vaut donc : $x = \frac{a+b}{2} = \frac{m}{2}$.

2^{ème} approche

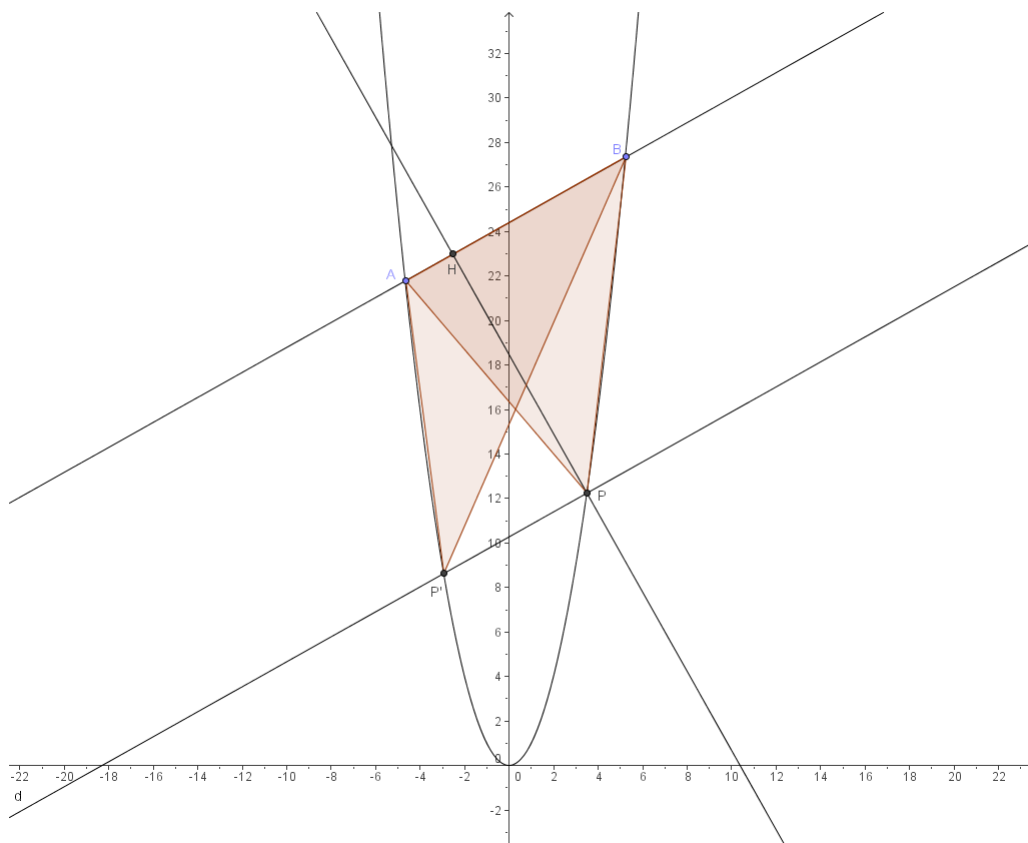
Nous introduisons le projeté orthogonal du point P sur la droite \mathcal{D} d'équation $y = mx + p$. L'aire $\mathcal{A}(ABP)$ du triangle ABP est alors donnée par :

$$\mathcal{A}(ABP) = \frac{AB \times HP}{2}$$

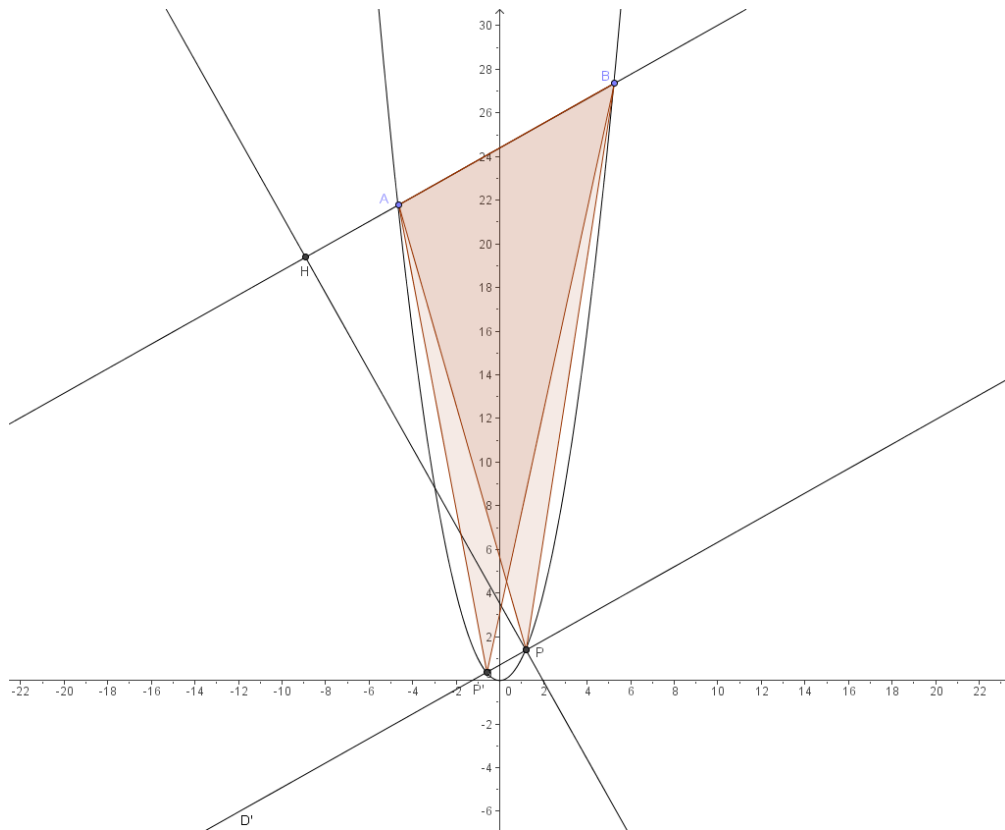
Les points A et B étant donnés, l'aire ci-dessus sera d'autant plus grande que la distance HP sera elle-même grande.

Considérons alors la parallèle \mathcal{D}' à \mathcal{D} passant par P. Elle recoupe la parabole en P'.

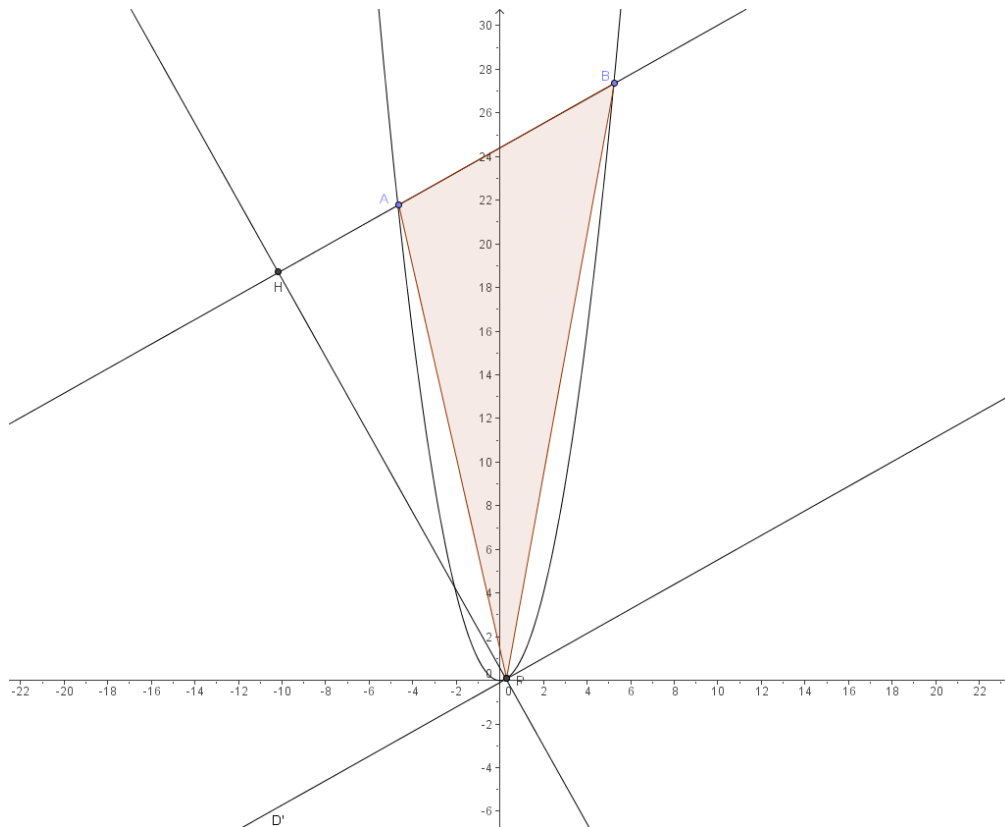
Les triangles ABP et ABP' ont la même aire (même base, même hauteur).



Pour accroître $\mathcal{A}(ABP)$, il suffit de déplacer \mathcal{D}' parallèlement à \mathcal{D} en l'éloignant :



On va pouvoir poursuivre ce déplacement jusqu'à atteindre une position limite (pour laquelle les points P et P' sont confondus) où la droite \mathcal{D}' sera tangente à la parabole (une telle position limite existe car la parabole est la courbe représentative d'une fonction dérivable !) :



Pour cette position limite, où le point P a pour abscisse x , le coefficient directeur de \mathcal{D}' est égal au nombre dérivé de la fonction carré, soit $2x$. Mais \mathcal{D}' étant parallèle à \mathcal{D} , son coefficient directeur vaut m .

On a donc : $2x = m$, soit : $x = \frac{m}{2}$.