Complexes

Activité N°1 page 278 – Corrigé

1. Avec le module

a. $\left|z-3\right|=\left|z+2i\right|$

On introduit les points A et B d'affixes respectives : $a=3$ et $b=-2i$. Il vient alors :

$$\left|z-3\right|=\left|z+2i\right| \Leftrightarrow \left|z-3\right|=\left|z-\left(-2i\right)\right| \Leftrightarrow \left|z-a\right|=\left|z-b\right| \Leftrightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{BM}$$

On en conclut :

L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|z-3\right|=\left|z+2i\right|$ est la médiatrice du segment [AB] où A et B sont les points A et B d'affixes respectives : $a=3$ et $b=-2i$.

b. $\left|\overline{z}+\dfrac{i}{2}\right|=4$

On a : $\left|\overline{z}+\dfrac{i}{2}\right|=\left|\overline{\overline{z}+\dfrac{i}{2}}\right|=\left|\overline{\overline{z}}+\overline{\left(\dfrac{i}{2}\right)}\right|=\left|z-\dfrac{i}{2}\right|$.

Soit alors A le point d'affixe $a=\dfrac{i}{2}$. Il vient :

$$\left|\overline{z}+\frac{i}{2}\right|=4 \Leftrightarrow \left|z-\frac{i}{2}\right|=4 \Leftrightarrow \left|z-a\right|=4 \Leftrightarrow \mathrm{AM}=4$$

On en conclut :

L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left\lvert\overline{z}+\dfrac{i}{2}\right\rvert=4$ est le cercle de centre A d'affixe $a=\dfrac{i}{2}$ et de rayon 4.

c. $\sqrt{2}\left|z+1\right|=\left|\left(1+i\right)z-4\right|$

On a :

$$\left|\left(1+i\right)z-4\right|=\left|\left(1+i\right)\left(z-\frac{4}{1+i}\right)\right|=\left|1+i\right|\times\left|z-\frac{4}{1+i}\right|=\sqrt{1^2+1^2}\times\left|z-\frac{4\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)}\right|$$

$$=\sqrt{2}\times\left|z-\frac{4\left(1-i\right)}{\left|1+i\right|^2}\right|=\sqrt{2}\times\left|z-\frac{4\left(1-i\right)}{2}\right|=\sqrt{2}\times\left|z-2\left(1-i\right)\right|$$

On en déduit alors :

$$\sqrt{2}\left|z+1\right|=\left|\left(1+i\right)z-4\right| \Leftrightarrow \sqrt{2}\left|z+1\right|=\sqrt{2}\times\left|z-2\left(1-i\right)\right| \Leftrightarrow \left|z+1\right|=\left|z-2\left(1-i\right)\right|$$

On s'est ainsi ramené à la situation du a. et on peut conclure :

> L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe *z* vérifie
> $$\sqrt{2}\left|z+1\right|=\left|\left(1+i\right)z-4\right|$$
> est la médiatrice du segment [AB]
> où A et B sont les points A et B d'affixes respectives : $a=-1$ et $b=2\left(1-i\right)$.

d. $\left|z+1-2i\right|<\sqrt{5}$

On a : $\left|z+1-2i\right|=\left|z-\left(-1+2i\right)\right|$.

Soit alors A le point d'affixe $a=-1+2i$. Il vient :

$$\left|z+1-2i\right|<\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|z-\left(-1+2i\right)\right|<\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|z-a\right|<\sqrt{5} \Leftrightarrow \mathrm{AM}<\sqrt{5}$$

On en conclut :

> L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe *z* vérifie $\left|z+1-2i\right|<\sqrt{5}$
> est l'intérieur du disque de centre A d'affixe $a=-1+2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

e. $\left|\dfrac{z+2i}{z+1-2i}\right|>1$

Notons, dans un premier temps, que le dénominateur entraîne : $z\neq-1+2i$.

Pour tout complexe *z* dans $\mathbb{C}-\left\{-1+2i\right\}$, on a alors :

$$\left|\frac{z+2i}{z+1-2i}\right|>1 \Leftrightarrow \left|z+2i\right|>\left|z+1-2i\right|$$

Soit les points A et B d'affixes respectives : $a=-2i$ et $b=-1+2i$. Il vient alors :

$$\left|z+2i\right|>\left|z+1-2i\right| \Leftrightarrow \left|z-\left(-2i\right)\right|>\left|z-\left(-1+2i\right)\right| \Leftrightarrow \left|z-a\right|>\left|z-b\right| \Leftrightarrow \mathrm{AM}>\mathrm{BM}$$

L'inéquation : $\mathrm{AM}>\mathrm{BM}$ définit le demi-plan <u>ouvert</u> $\mathscr{P}$ de frontière la médiatrice du segment [AB] et contenant le point B.

On en conclut, en tenant compte du fait que le point $\mathrm{B}\left(-1+2i\right)$ doit être exclu :

> L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe *z* vérifie $\left|\dfrac{z+2i}{z+1-2i}\right|>1$
> est le demi-plan $\mathscr{P}$ privé du point B.

2. Avec l'argument.

a. $\arg z = \frac{\pi}{6}$

Notons qu'une telle équation exclut la solution $z = 0$.

En tenant compte de $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtient immédiatement :

> L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\arg z = \frac{\pi}{6}$
>
> est la demi-droite du plan complexe d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ avec $x > 0$.

ATTENTION ! Ce résultat est « classique » et on peut conclure comme cela a été fait MAIS on ne doit pas retenir un tel résultat par cœur ! Rappelons donc brièvement la démarche : la forme trigonométrique d'un point $\mathrm{M}(z)$ de l'ensemble cherché

s'écrit : $|z| \times \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = |z| \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ avec $|z| > 0$.

En notant : $z = x + iy$, on a donc : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}|z| \\ y = \frac{1}{2}|z| \end{cases}$. Avec $|z| > 0$, on obtient bien une

représentation paramétrique de la demi-droite d'équation

$y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}x = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}x = \tan\frac{\pi}{6}x = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ avec $x > 0$.

b. $\arg \overline{z} = \frac{\pi}{3}$.

Comme précédemment, la solution $z = 0$ est exclue.

Pour tout complexe z non nul, on a : $\arg \overline{z} = -\arg z$.

D'où : $\arg \overline{z} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\arg z = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arg z = -\frac{\pi}{3}$.

On s'est ainsi ramené à la situation précédente et, en tenant compte de

$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ on peut directement conclure :

> L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\arg \overline{z} = \frac{\pi}{3}$
>
> est la demi-droite du plan complexe d'équation $y = -\sqrt{3}x$ avec $x > 0$.

c. $\arg(iz) = -\frac{\pi}{4}$.

En notant que l'on a : $iz = 0 \Leftrightarrow z = 0$, la solution $z = 0$ est à exclure.

Pour tout complexe z non nul, on a : $\arg(iz) = \arg i + \arg z = \frac{\pi}{2} + \arg z$.

D'où : $\arg(iz) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg z = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arg z = -\frac{3\pi}{4}$.

On est une fois encore ramené à la situation du a.

On obtient cette fois (en tenant compte de $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$) :

L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\arg(iz) = -\frac{\pi}{4}$ est la demi-droite du plan complexe d'équation $y = x$ avec $x < 0$.

d. $\arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Le dénominateur conduit à exclure $z = 2i$.
On introduit les points A et B d'affixes respectives : $a = 2i$ et. $b = -1$ Il vient alors :

$$\arg\left(\frac{z-(-1)}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

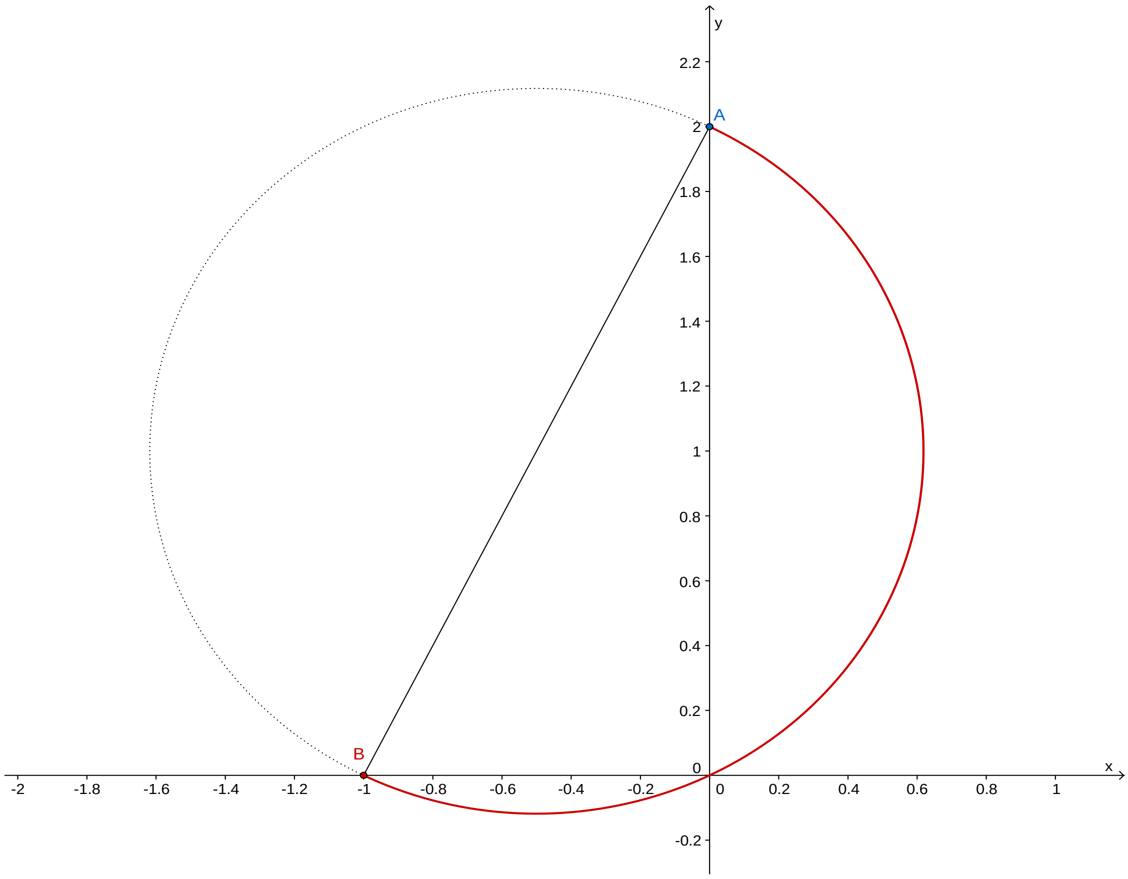
L'ensemble cherché est alors l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB] privé du point A (puisque la valeur $z = 2i$ doit être exclue).

Pour déterminer à quel demi-cercle nous avons affaire, nous pouvons considérer le cercle de diamètre [AB] (cf. la figure ci-après). Un point M de ce cercle différent des points A et B vérifie : $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Or, on a : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \arg\left(\frac{1}{-2i}\right) = \arg\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

On en conclut immédiatement que le point O appartient à ce cercle et que le demi-cercle cherché est le demi-cercle contenant le point O.

L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$ est le demi-cercle de diamètre [AB] privé du point A et contenant le point O, les points A et B étant les points d'affixes respectives $a = 2i$ et. $b = -1$.



y
2.2
A
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
B
x
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-0.2