
Continuité

Activité N°1 page 48 – Corrigé

1. On a :

$$f(0,7) = 0,7 - E(0,7) = 0,7 - 0 = \boxed{0,7}$$

$$f(1,7) = 1,7 - E(1,7) = 1,7 - 1 = \boxed{0,7}$$

$$f(2,7) = 2,7 - E(2,7) = 2,7 - 2 = \boxed{0,7}$$

$$f(-2,3) = -2,3 - E(-2,3) = -2,3 - (-3) = \boxed{0,7}$$

2. a) Soit x un réel quelconque fixé. On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

On en déduit alors, pour tout entier p : $E(x) + p \leq x + p < E(x) + p + 1$.

Les entiers $E(x) + p$ et $E(x) + p + 1$ étant consécutifs, on a : $E(x + p) = E(x) + p$.

Pour tout réel x et tout entier naturel p : $E(x + p) = E(x) + p$.

b) Pour tout réel x et tout entier p non nul, on a, d'après la question précédente :

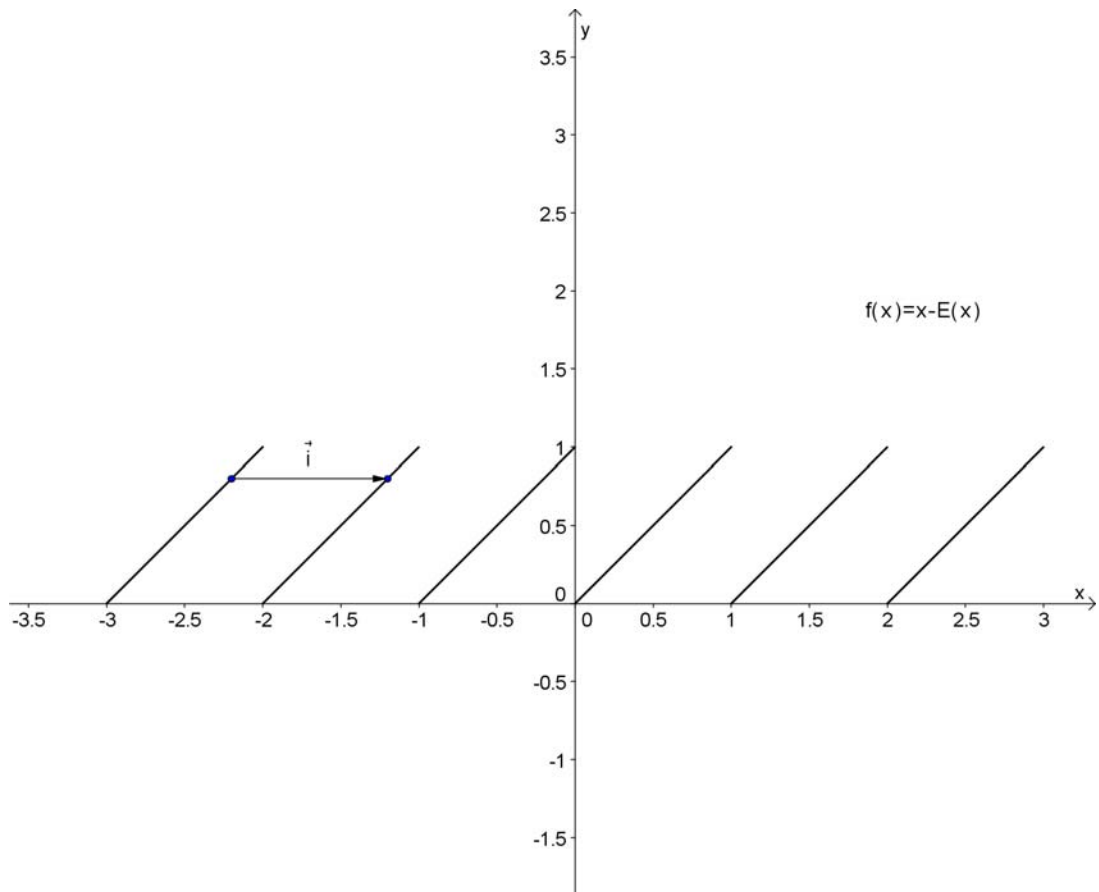
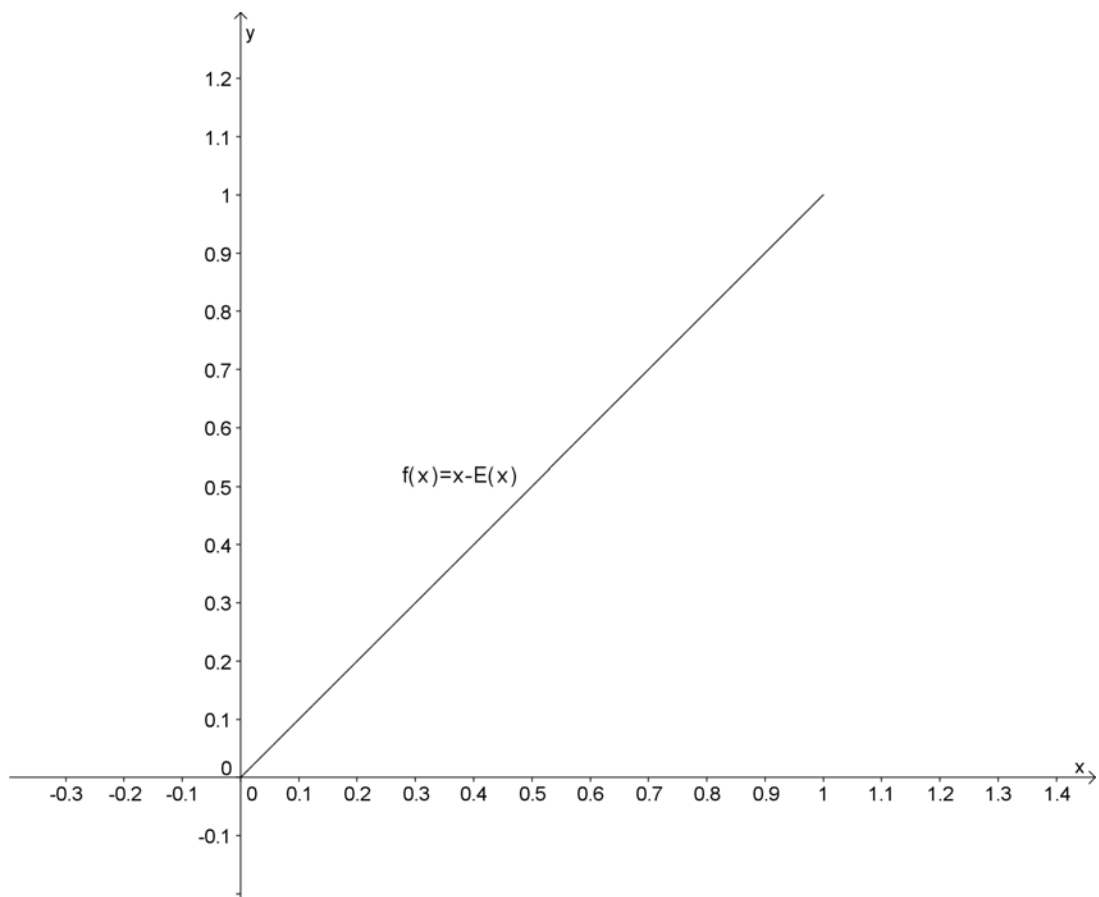
$$f(x + p) = (x + p) - E(x + p) = x + p - [E(x) + p] = x - E(x) = f(x)$$

On en déduit que tout entier non nul est une période de la fonction f . C'est, en particulier, le cas pour l'entier 1.

La fonction f est périodique et 1 est une période de f .

3. a) Pour tout réel x dans l'intervalle $[0; 1[$, on a : $E(x) = 0$ et donc $f(x) = x$. On obtient donc un segment dont le support est la première bissectrice.

Pour obtenir la représentation graphique de la fonction f lorsque le réel x varie dans l'intervalle $[-3; 3[$, on utilise la représentation obtenue précédemment et la périodicité de la fonction f (translation de vecteur \vec{i}).



b) La fonction f n'est pas continue pour toute valeur entière de x .

Donnons un entier k et étudions $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x > k}} f(x)$.

Pour tout x réel de l'intervalle $[k; k+1[$, on a $E(x) = k$ et donc : $f(x) = x - k$.

On en déduit alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x > k}} f(x) = k - k = 0 = f(k)$.

Pour tout x de l'intervalle $[k-1; k[$, on a $E(x) = k-1$ et donc : $f(x) = x - (k-1)$.

On en déduit alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} f(x) = k - (k-1) = 1 \neq f(k)$.

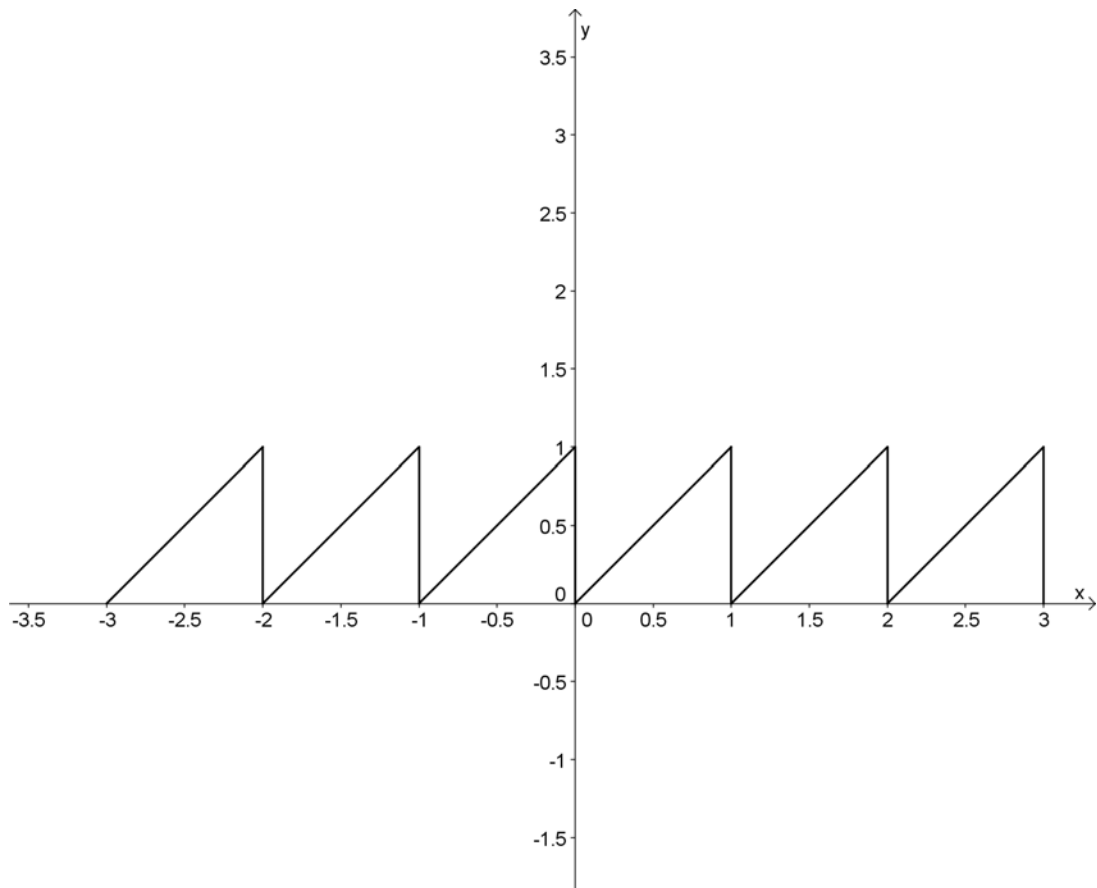
Ainsi, la fonction f n'est pas continue en $x = k$.

En revanche, pour tout réel x de l'intervalle $]k; k+1[$, on a $f(x) = x - k$. La fonction f est affine sur cet intervalle ouvert et y est donc continue en tout point.

La fonction f est :

- discontinue pour toute valeur entière de x ($x \in \mathbb{Z}$);
- continue pour toute valeur non entière de x ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

4. A la calculatrice, on obtient :



La calculatrice « complète » donc la courbe à l'aide de segments ... En fait, grâce aux paramètres fournis (notamment l'incrément au niveau de x), la calculatrice calcule des couples $(x_i ; f(x_i))$ et relie à l'aide d'un segment les points de coordonnées $(x_i ; f(x_i))$ et $(x_{i+1} ; f(x_{i+1}))$. Tant que $f(x_i)$ peut être calculé, ce procédé est appliqué ! On obtient alors une ligne polygonale qui est loin d'être satisfaisante au plan mathématique ... On doit donc se méfier de ce magnifique outil qu'est la calculatrice graphique !