Continuité – Limites

Activité N°2 page 24 – Corrigé

1. Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

   a. On a immédiatement $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ puis : $\lim_{x\to+\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$.

   On a aussi : $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, d'où : $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ puis : $\lim_{x\to+\infty} \left(3x^2 - 4\right) = +\infty$.

   On est ainsi confronté à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

   b. Pour *x* non nul, on peut factoriser l'expression $-x^3 + 3x^2 - 4$ par $-x^3$ et on obtient :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 = -x^3\left(1 + \frac{3x^2}{-x^3} + \frac{-4}{-x^3}\right) = -x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ non nul : } f(x) = -x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)}$$

   c. En tenant compte de $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, il vient (multiplication par un réel)

   $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^3} = 0$ puis (somme) : $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right) = 1$.

   Par ailleurs, on a vu en 1.a. que l'on a avait : $\lim_{x\to+\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$.

   On en déduit finalement (produit) : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[-x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2. Soit la fonction *g* définie sur $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{-1\}$ par $g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1}$.

   a. On a immédiatement : $\lim_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$ et (somme) : $\lim_{x\to-\infty} (-3x + 1) = +\infty$.

   On a aussi : $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, d'où : $\lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$.

   On en déduit (somme) : $\lim_{x\to-\infty} \left(2x^2 - 3x + 1\right) = +\infty$.

   On a également : $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et (somme) : $\lim_{x\to-\infty} \left(x^3 + 1\right) = -\infty$.

   On est ainsi confronté à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

b. Pour tout x réel non nul, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur de g par, respectivement, $2x^2$ et x^3 :

$$g(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}=\frac{2x^2\left(1+\frac{-3x}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{2}{x}\frac{1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$, on a (multiplication par un réel) :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$ puis (somme) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=1$. Il vient alors (rapport) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=1$ et enfin (produit) :

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}\frac{1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=0\times1=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=0}$$

3. Soit la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x)=x-2\sqrt{x}$.

a. On a immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et donc (multiplication par un réel) $\lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{x}=+\infty$.
On est ainsi confronté à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

b. Pour tout x de D non nul, c'est-à-dire, tout réel x strictement positif, on peut factoriser $x-2\sqrt{x}$ par x et il vient :

$$x-2\sqrt{x}=x\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x}\right)=x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, on a : } h(x)=x-2\sqrt{x}=x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}$$

c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, on a (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)=1$ puis (produit) :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}\right)=+\infty}$$