Fonction exponentielle

Activité N°3 page 103 - Corrigé

Une suite qui converge vers le nombre e.

Etude d’un cas particulier

a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: la fonction exponentielle et la fonction affine $x \mapsto -(1+x)$. On a alors, pour tout x réel :

$$\varphi'(x) = e^x - 1$$

On a alors :

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

La fonction dérivée s’annule pour $x = 0$ uniquement.

(Note : cette seule conclusion ne nous donne aucune information sur le signe de la dérivée ! Il fallait détailler un minimum et faire au moins référence à la monotonie stricte de la fonction exponentielle)

Par ailleurs :

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Finalement :

- Si $x < 0$, alors $\varphi'(x) < 0$. La fonction φ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$;
- $\varphi'(0) = 0$;
- Si $x > 0$, alors $\varphi'(x) > 0$. La fonction φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

(Note : il eut été équivalent de conclure de la même façon avec les intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$. Par ailleurs, je rappelle qu’étudier les variations d’une fonction ne signifie pas qu’il convient d’en fournir le tableau de variation !)

b) D'après l'étude des variations de φ menée à la question précédente, nous pouvons affirmer que :

- Pour tout $x \leq 0$, $\varphi(x) \geq \varphi(0)$;
- Pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) \geq \varphi(0)$.

La fonction φ admet donc un minimum global en 0 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geq \varphi(0)$.
On a, par ailleurs : $\varphi(0) = e^0 - (1+0) = 1-1 = 0$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geq 0$. C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - (1+x) \geq 0$.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x \qquad \textbf{[1]}}$$

c) Dans cette question, il convient, comme mentionné dans l'énoncé, de partir de l'inégalité **[1]** obtenue à la question précédente.

Plusieurs possibilités s'offrent à nous.

On peut effectuer un changement de variable en posant, par exemple : $t = -x$. Lorsque *x* parcourt $\mathbb{R}$, il en va de même pour *t*.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-(-x)} \geq 1-(-x) \Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t} \geq 1-t \Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{e^t} \geq 1-t$$

On ne peut inverser « froidement ». Pour ce faire, il convient de manipuler des quantités de même signe (la fonction inverse est strictement décroissante sur tout intervalle ne contenant pas 0) ! Le membre de gauche de l'inégalité est strictement positif, il en ira de même de celui de droite pour tout *t* réel tel que : $1-t > 0$; soit $t < 1$.

Pour tout *t* réel strictement inférieur à 1, on a donc : $e^t \leq \dfrac{1}{1-t}$.
Il vient alors, en renommant la variable :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\infty;1\right[,\ e^x \leq \frac{1}{1-x} \qquad \textbf{[2]}}$$

On pouvait également inverser avant d'effectuer le changement de variable.

Pour ce faire, il faut $1+x>0$, c'est-à-dire : $x>-1$.

Dans ces conditions, on a : $\frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x}$, soit : $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$.

On effectue alors le changement de variable : $t=-x$. Il vient cette fois :

$$x>-1 \Leftrightarrow -x<1 \Leftrightarrow t<1$$

Finalement : $\forall t \in]-\infty;1[,\ e^t \leq \frac{1}{1-t}$.

Comme ci-dessus, il ne reste plus qu'à renommer la variable …

Un encadrement du nombre *e*

a) L'inégalité **[1]** étant valable pour tout *x* réel, nous pouvons, en particulier, l'utiliser avec $x=\frac{1}{n}$ (où *n* est un entier naturel non nul). Il vient donc :

$$e^{\frac{1}{n}} \geq 1+\frac{1}{n}$$

Les deux membres de cette inégalité sont strictement positifs. Or, pour tout entier naturel *n* non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'inégalité ci-dessus équivaut alors à :

$$\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Soit, finalement :

$$e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

b) Pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $n \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$. Nous pouvons donc utiliser l'inégalité **[2]** avec $x = \frac{1}{n+1}$.

Il vient donc :

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$$

Soit, en tenant compte de $\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+1-1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$:

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq 1+\frac{1}{n}$$

Les deux membres de cette inégalité sont strictement positifs. Or, pour tout entier naturel *n* non nul, la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'inégalité ci-dessus équivaut alors à :

$$\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Soit, finalement :

$$e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

Une suite qui converge vers *e*

a) D'après la partie précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq e \leq u_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit, en soustrayant u_n à chaque membre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq e - u_n \leq u_n \times \left(1+\frac{1}{n}\right) - u_n$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq e - u_n \leq \frac{u_n}{n}$$

L'inégalité : $u_n \leq e$ entraîne, pour tout entier naturel *n* non nul : $\frac{u_n}{n} \leq \frac{e}{n}$.

Par ailleurs, comme $e < 3$, il vient : $\frac{u_n}{n} \leq \frac{e}{n} < \frac{3}{n}$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}}$$

b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors d'affirmer : $\lim\limits_{n \to +\infty} (e - u_n) = 0$; soit, de façon équivalente :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = e}$$

c) A la calculatrice, nous obtenons les valeurs approchées (10^{-6} près) suivantes :

$$u_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \simeq 2,704\ 814$$
$$u_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \simeq 2,716\ 924$$
$$u_{10000} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} \simeq 2,718\ 146$$

(Note : insistons, pour finir, sur le fait que ces valeurs ne prouvent en rien que la suite u converge bien vers e ! Elles nous confortent tout au plus dans cette « idée ». Elles nous permettent, en revanche, de constater une certaine lenteur de la convergence …)