Fonction exponentielle

Activité N°4 page 104 - Corrigé

Coût et bénéfice.

Etude de la fonction coût

a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction linéaire. Elle l'est donc à fortiori sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}$ est la composée de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ et de la fonction exponentielle. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine. Elle l'est donc à fortiori sur $\mathbb{R}_+$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. En définitive la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement, la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Il vient alors, pour tout *x* réel positif :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}\right)$$

On a alors :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}} > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}} < e^0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x > \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

On obtient de façon analogue :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Finalement :

- Si $x<\frac{3}{2}$, alors $f'(x)<0$. La fonction *f* est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$;
- $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$;
- Si $x>\frac{3}{2}$, alors $f'(x)>0$. La fonction *f* est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

b) D'après ce qui précède, la fonction *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+$ pour $x=\frac{3}{2}$.
On en déduit alors que le coût de fabrication est minimum lorsque l'entreprise fabrique $\frac{3}{2}\times 100=150$ objets.

Le coût de fabrication est minimum lorsque l'entreprise fabrique 150 objets.

Détermination et étude du bénéfice

a) Si un objet est vendu 6€, 100 objets seront vendus 600€, soit 0,6 millier d'euros. Dans ces conditions, le prix de vente de *q* centaines d'objets sera de $0,6q$ milliers d'euros.
Le bénéfice réalisé (en milliers d'euros) s'élèvera alors à :

$$0,6q-\left(\frac{1}{2}q+e^{-\frac{1}{2}q+\frac{3}{4}}\right)=0,6q-0,5q-e^{-\frac{1}{2}q+\frac{3}{4}}=0,1q-e^{-\frac{1}{2}q+\frac{3}{4}}=\frac{1}{10}q-e^{-\frac{1}{2}q+\frac{3}{4}}$$

Pour *q* centaines d'objets vendus, le bénéfice réalisé (en milliers d'euros) s'élève à :

$$\frac{1}{10}q-e^{-\frac{1}{2}q+\frac{3}{4}}$$

b) La dérivabilité de la fonction *g* se justifie de façon tout à fait similaire à ce qui a été fait avec *f*. Pour tout réel positif, on a :

$$g'(x)=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}\right)$$

La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives, on a, pour tout *x* réel positif : $e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}>0$ et donc : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}\right)>0$. La fonction g' prenant des valeurs strictement positives, on en déduit finalement :

> La fonction *g* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a facilement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\infty$.

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

On en déduit (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}\right)=0$.

Par ailleurs, on a immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{10}x=+\infty$.

Finalement (addition) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{10}x-e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}\right)=+\infty}$$

Avant de pouvoir dresser le tableau de variation de la fonction *g*, il reste à calculer $g(0)$:

$$g(0)=\frac{1}{10}\times 0-e^{-\frac{1}{2}\times 0+\frac{3}{4}}=-e^{\frac{3}{4}}$$

On obtient alors le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-e^{\frac{3}{4}}$ ↗	$+\infty$

c) A la question précédente, nous avons établi : $\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}\right)=0$.

Or, on a : $-e^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}=g(x)-\frac{1}{10}x$. On a donc : $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{1}{10}x\right)=0$.

On en déduit immédiatement :

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y=\frac{1}{10}x$.

d) A la question b) nous avons vu que la fonction *g* était dérivable sur $\mathbb{R}_+$; elle y est donc continue.
Par ailleurs, la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
Enfin, on a : $g(0)=-e^{\frac{3}{4}}<0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure :

L'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_+$.

En tabulant à la calculatrice avec des pas respectifs de 1, 10^{-1} et 10^{-2}, on obtient successivement :

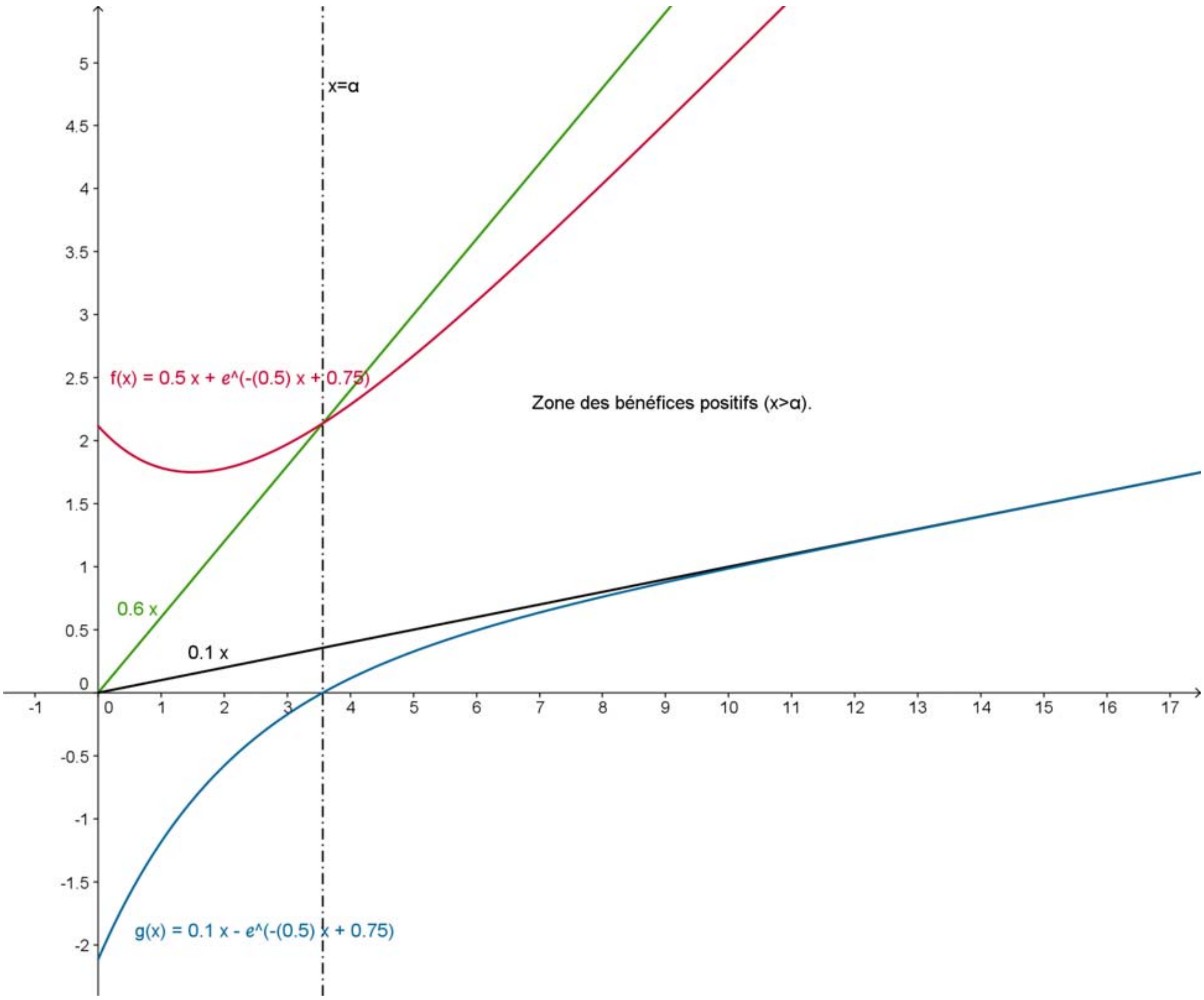
$$3<\alpha<4$$
$$3,5<\alpha<3,6$$
$$3,56<\alpha<3,57$$

$3,56<\alpha<3,57$

e) D'après la question précédente, si l'entreprise fabrique (et vend !) 356 objets ($q=3,56$), le bénéfice sera négatif (perte). En revanche, à partir de 357 objets fabriqués (et vendus !) le bénéfice sera positif :

L'entreprise doit fabriquer un minimum de 357 objets pour réaliser un bénéfice.

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation de la courbe $\mathscr{C}$ (bénéfices, en bleu), de l'asymptote oblique d'équation : $y=\frac{1}{10}x$ (en noir), de la fonction de coût (en rouge) et des ventes (en vert). Le seuil à partir duquel les bénéfices sont positifs est matérialisé par la droite en pointillés d'équation $x=\alpha$.


x=α
f(x) = 0.5 x + e^(-(0.5) x + 0.75)
Zone des bénéfices positifs (x>α).
0.6 x
0.1 x
g(x) = 0.1 x - e^(-(0.5) x + 0.75)