
Continuité – Limites

Activité N°4 page 25 – Corrigé

1. Soit la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x - x$.

a. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme différence de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} et donc, à fortiori, sur cet intervalle. Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a alors :

$$f'(x) = \cos x - 1$$

Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $0 \leq \cos x \leq 1$, soit $-1 \leq \cos x - 1 \leq 0$, c'est-à-dire :

$$-1 \leq f'(x) \leq 0. \text{ Par ailleurs on a, sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

On déduit de ce qui précède :

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) \geq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \geq f(x) \Leftrightarrow 0 \geq \sin x - x \Leftrightarrow x \geq \sin x$$

On a bien :

Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\sin x \leq x$.

2. Soit la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \sin x - x \cos x$.

a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme différence de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} (le deuxième terme étant lui-même une fonction

dérivable sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}) et donc, à fortiori, sur cet intervalle. Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a alors :

$$g'(x) = \cos x - 1 \times \cos x + x \sin x = x \sin x$$

Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $0 \leq \sin x \leq 1$, d'où $0 \leq x \sin x \leq x$, c'est-à-dire :

$$0 \leq g'(x) \leq x. \text{ Par ailleurs on a, sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

On déduit de ce qui précède :

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow g(0) \leq g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \Leftrightarrow 0 \leq \sin x - x \cos x \Leftrightarrow x \cos x \leq \sin x$$

On a bien :

Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $x \cos x \leq \sin x$.

3. a. D'après les résultats obtenus aux questions 1.b. et 2.b., on a, pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x \cos x \leq \sin x \leq x$$

Pour tout réel x strictement positif de cet intervalle, c'est-à-dire pour tout réel x de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on peut alors diviser cette double inégalité par x sans en changer le sens :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Soit maintenant un réel x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Le réel $-x$ appartient à l'intervalle

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on a donc, d'après ce qui précède : $-x \cos(-x) \leq \sin(-x) \leq -x$, c'est-à-dire :

$$-x \cos x \leq -\sin x \leq -x. \text{ D'où, en considérant les opposés : } x \cos x \geq \sin x \geq x.$$

Pour tout réel x strictement négatif de $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, c'est-à-dire pour tout réel x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, on peut alors diviser cette double inégalité par x en en changeant le sens :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

En définitive :

| |
|--|
| Pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. |
|--|

b. La double inégalité précédente, valable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous permet de calculer

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x}.$$

En effet, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Le théorème des gendarmes nous donne alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Finalement :

| |
|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ |
|---|