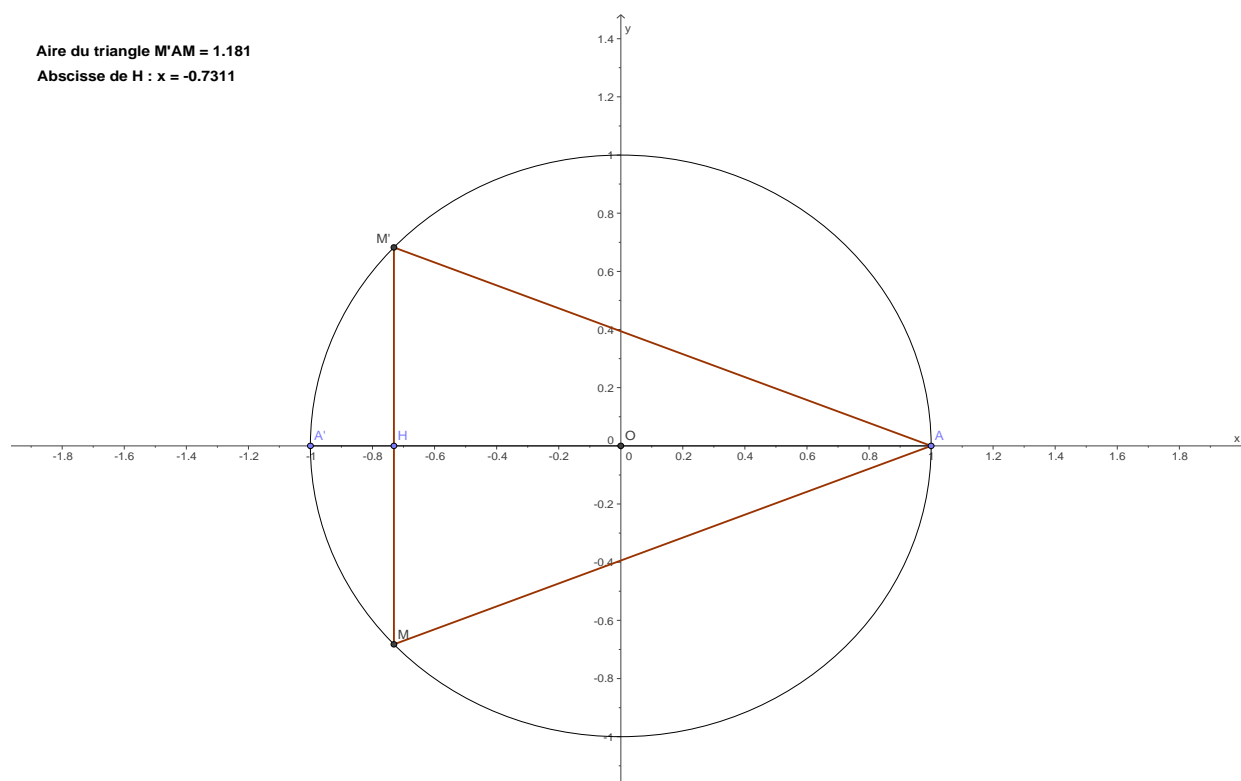

Dérivation

Activité N°5 page 74 - Corrigé

Travail sur ordinateur avec Geogebra

1. On obtient :



2. D'après les valeurs fournies par Geogebra, il semblerait que l'aire du triangle MAM' soit maximale pour $x = -\frac{1}{2}$.

Une étude de fonction

1. a) La variable x correspond à l'abscisse du point H, point quelconque du segment $[AA']$.
Or, l'abscisse de A' vaut -1 et celle de A vaut 1 . On en déduit immédiatement :

$x \in [-1; 1]$

b) Par construction, la droite $d = (MM')$ est perpendiculaire à la droite (AA') . On en déduit que la droite (AH) est la hauteur du triangle AMM' issue de A .

L'aire du triangle AMM' vaut donc : $\frac{1}{2} \times MM' \times AH$.

Comme on a : $A(1; 0)$ et $H(x; 0)$, il vient : $\overline{AH}(x-1; 0)$ et, le réel x étant inférieur à 1 :

$$AH = |x-1| = 1-x.$$

Le cercle \mathcal{C} est le cercle de centre O et de rayon $OA = 1$. Le repère considéré étant orthonormal, on a immédiatement une équation de \mathcal{C} :

$$x^2 + y^2 = 1$$

Pour une valeur de x donnée, il vient alors : $y^2 = 1 - x^2$, d'où : $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

On en déduit immédiatement, en choisissant pour M (comme suggéré par la figure) le point d'ordonnées négative : $M(x; -\sqrt{1-x^2})$ et $M'(x; \sqrt{1-x^2})$.

D'où : $\overline{MM'}(0; 2\sqrt{1-x^2})$ et : $MM' = 2\sqrt{1-x^2}$.

D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{1}{2} \times MM' \times AH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-x^2} \times (1-x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{L'aire du triangle } AMM' \text{ vaut : } (1-x)\sqrt{1-x^2}.$$

2. a) Considérons l'intervalle : $] -1; 1[$.

La fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme, elle l'est donc à fortiori sur $] -1; 1[$.

La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est également dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme, elle l'est donc à fortiori sur $] -1; 1[$. De surcroît, comme $1-x^2 = (1-x)(1+x)$, on en déduit immédiatement : $\forall x \in] -1; 1[, 1-x^2 > 0$. La fonction racine carrée étant dérivable sur \mathbb{R}_+^* , on en déduit finalement que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $] -1; 1[$.

En définitive, la fonction $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $] -1; 1[$ comme produit de deux fonctions dérivable sur cet intervalle.

Posons : $g : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. On la dérive sur $] -1; 1[$ en tant que fonction composée et il vient :

$$\forall x \in] -1; 1[, g'(x) = (-2x) \times \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

On dérive alors la fonction f en tant que produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-\sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-x^2} - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-(1-x^2) - x + x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

En remarquant que 1 est racine évidente de $2x^2 - x - 1$, on a facilement :

$$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$$

Finalement :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Pour étudier la dérivabilité de la fonction f en 1, nous allons nous intéresser à la limite :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

On doit imposer $h < 0$ puisque la fonction f n'est pas définie à droite de 1.

On a immédiatement : $f(1) = 0$.

$$\text{Puis : } f(1+h) = (1-(1+h))\sqrt{1-(1+h)^2} = -h\sqrt{1-(1+2h+h^2)} = -h\sqrt{-2h-h^2}.$$

$$\text{D'où : } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-h\sqrt{-2h-h^2} - 0}{h} = -\sqrt{-2h-h^2}.$$

On a immédiatement, la fonction $h \mapsto -2h - h^2$ étant continue sur \mathbb{R} (et donc, en particulier, en 0) : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} (-2h - h^2) = -2 \times 0 - 0^2 = 0$.

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0.$$

$$\text{On en déduit (composition) : } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \sqrt{-2h - h^2} = 0.$$

En définitive :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \sqrt{-2h - h^2} = 0$$

La fonction f est dérivable en 1 et on a : $f'(1) = 0$.

c) On s'intéresse cette fois à : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

On a : $f(-1) = 0$.

Par ailleurs :

$$f(-1+h) = (1 - (-1+h))\sqrt{1 - (-1+h)^2} = (2-h)\sqrt{1 - (1-2h+h^2)} = (2-h)\sqrt{2h-h^2}$$

$$\text{D'où : } \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2} - 0}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{h(2-h)}}{h}$$

Pour $h > 0$, $f(-1+h)$ existe pour $-1+h \leq 1$, soit $h \leq 2$. Ainsi, on considère ici le réel h dans l'intervalle $]0; 2]$. On peut alors écrire : $\sqrt{h(2-h)} = \sqrt{h}\sqrt{2-h}$ et :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{h(2-h)}}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{h}\sqrt{2-h}}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}}$$

On a immédiatement, la fonction $h \mapsto 2-h$ étant continue sur \mathbb{R} (et donc, en particulier, en 0) : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} (2-h) = 2-0 = 2$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$.

On en déduit (composition) : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{2-h} = \sqrt{2}$, puis (produit) : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} (2-h)\sqrt{2-h} = 2\sqrt{2}$.

Par ailleurs : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{h} = 0^+$.

Finalement (rapport) : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{(2-h)\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}} = +\infty$.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = +\infty$$

D'après le résultat précédent, on a finalement :

La fonction f n'est pas dérivable en -1 et sa courbe représentative \mathcal{C} admet au point A' une tangente verticale.

d) A la question a), on a vu que l'on avait : $\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Pour tout réel x de l'intervalle $] -1; 1[$, on a : $1-x^2 > 0$ et donc $\sqrt{1-x^2} > 0$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de son numérateur.

Comme : $-1 < x < 1 \Rightarrow -2 < x-1 < 0$, le facteur $x-1$ est strictement négatif.

Par ailleurs : $2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. On a donc :

- Pour tout x dans $] -1; -\frac{1}{2}[$, $2x+1 < 0$ et donc $f'(x) > 0$.
- $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
- Pour tout x dans $] -\frac{1}{2}; 1[$, $2x+1 > 0$ et donc $f'(x) < 0$.

On a déjà $f(1) = f(-1) = 0$. On calcule :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Les éléments précédents nous permettent de dresser le tableau de variation de f :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$			+	0	-
f	0	↗		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘
					0

Optimisation

- a) D'après l'étude des variations de la fonction f , celle-ci admet un maximum global sur l'intervalle $[-1; 1]$ pour $x = -\frac{1}{2}$. Comme $f(x)$ représente l'aire du triangle AMM' , on en déduit finalement :

$$\text{L'aire du triangle } AMM' \text{ est maximale pour } x = -\frac{1}{2}.$$

La conjecture formulée à l'issue de la construction demandée était donc exacte.

- b) L'aire maximale est égale à $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ soit, d'après la question précédente : $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on a : $MM' = 2\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$ et

$$AH = 1 - x = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Il vient alors : $\tan \widehat{MM'A} = \frac{AH}{HM'} = \frac{AH}{\frac{1}{2}MM'} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

On en déduit immédiatement : $\widehat{MM'A} = \frac{\pi}{3}$.

Or, de la symétrie du problème il résulte que le triangle AMM' est isocèle en A.

Le triangle AMM' est isocèle et ses angles à la base ont pour mesure $\frac{\pi}{3}$: nous avons donc affaire à un triangle équilatéral.

$$\text{Le triangle } AMM' \text{ d'aire maximale est un triangle équilatéral.}$$