# *Suites numériques*

Activités pages 14-15 – Corrigé

## Activité 1

1. On a immédiatement, en remplaçant $n$ par 1 :

$$P_1 : \text{« } 1+a \geq 1+a \text{ »}$$
$$Q_1 : \text{« } 10^1 - 1 \text{ est divisible par 9 »}$$
$$R_1 : \text{« } 1\times 2 = \frac{1\times 2\times 3}{3} \text{ »}$$

Les propriétés $P_1$, $Q_1$ et $R_1$ sont clairement vraies.

2. a. On a :

$$P_{n+1} : \text{« } (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \text{ »}$$
$$Q_{n+1} : \text{« } 10^{n+1} - 1 \text{ est divisible par 9 »}$$
$$R_{n+1} : \text{« } 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n\times(n+1) + (n+1)\times(n+2) = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}{3} \text{ »}$$

b. Supposons que $P_n$ soit vraie. On a donc $(1+a)^n \geq 1+na$.
Comme a est un réel strictement positif, il en va de même pour $1+a$ et on obtient immédiatement :

$$(1+a)^n \geq 1+na \Leftrightarrow (1+a)^n \times (1+a) \geq (1+na)\times(1+a) \Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$$

Comme $na^2 > 0$, il vient immédiatement :

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

(en fait, on a plus précisément $(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a$ mais l'inégalité stricte entraîne l'inégalité large qui est la seule dont nous avons besoin)

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Supposons maintenant que $Q_n$ soit vraie. On a donc $10^n - 1$ qui est divisible par 9.

On s'intéresse à $10^{n+1} - 1$.

Il vient immédiatement :

$$10^{n+1}-1=10\times10^{n}-1=10\times\left(10^{n}-1+1\right)-1=10\times\left(10^{n}-1\right)+10-1=10\times\left(10^{n}-1\right)+9$$

Comme on a supposé que $10^{n}-1$ était divisible par 9, il existe un entier naturel $k$ tel que $10^{n}-1=9k$ . On a alors : $10^{n+1}-1=10\times\left(10^{n}-1\right)+9=10\times9k+9=9\times\left(10k+1\right)$.
Ainsi $10^{n+1}-1$ est divisible par 9.

Supposons enfin que la propriété $R_n$ soit vraie. On a donc :

$$1\times2+2\times3+...+n\times\left(n+1\right)=\frac{n\times\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)}{3}$$

Intéressons-nous maintenant au produit : $1\times2+2\times3+...+n\times\left(n+1\right)+\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)$.
Comme $R_n$ est supposée vraie, on a :

$$\begin{aligned}\underbrace{1\times2+2\times3+...+n\times\left(n+1\right)}+\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)&=\frac{n\times\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)}{3}+\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)\\&=\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)\times\left(\frac{n}{3}+1\right)\\&=\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)\times\frac{n+3}{3}\\&=\frac{\left(n+1\right)\times\left(n+2\right)\times\left(n+3\right)}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété $R_{n+1}$ est vraie.

## Activité 4

1. a. L'algorithme proposé affiche la plus petite valeur de n pour laquelle on a $\frac{1}{n^2}<10^{-3}$.
En l'implémentant sur une calculatrice, on obtient $n=32$.
A titre de vérification : $\frac{1}{31^2}\simeq1,04\times10^{-3}>10^{-3}$ et $\frac{1}{32^2}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1\,024}<\frac{1}{1\,000}=10^{-3}$.

b. Dans cette question, on cherche la plus petite valeur de $N$ à partir de laquelle la suite $\left(u_n\right)$ prend des valeurs strictement inférieures à $10^{-6}$. Par rapport à la situation précédente, il suffit donc de remplacer $10^{-3}$ par $10^{-6}$ dans l'algorithme.

c. Notons d'abord que pour tout entier naturel $n$ non nul, on a immédiatement : $\frac{1}{n^2}>0$.
Soit maintenant $\varepsilon$ un réel strictement positif.

On a, en tenant compte du fait que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ : $u_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Il suffit donc de choisir $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ pour avoir $u_n < \varepsilon$ pour tout entier naturel $n$ tel que $n \geq N$.

Plus précisément, on peut choisir pour $N$ (mais ce n'est pas une obligation !) le plus petit entier naturel strictement supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Comme on a $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+1$, ce plus petit entier est simplement $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+1$ (pour rappel : $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ désigne la partie entière du réel $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$).

2. Remarquons d'abord que l'on a, pour tout entier naturel $n$ non nul : $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$.

   On a ensuite, en tenant compte du fait que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ : $v_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon}$.

   En choisissant cette fois $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$, il vient : $n \geq N \Rightarrow 0 < v_n < \varepsilon$.

   On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.