
Calcul intégral.

Corrigés d'exercices

Version du 06/04/2014

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 213 : N°112

Page 214 : N°114, 116

Page 215 : N°119

Page 217 : N°129

N°112 page 213

Partie A

1. a. Pour tout réel x strictement positif, on a : $xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \text{ (croissance comparée)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{produit} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout x strictement positif, on a :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x \times e^{-x^2}) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

Le trinôme $1 - 2x^2$ s'annule pour $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, comme le coefficient de « x^2 » est strictement négatif, $1 - 2x^2$ est strictement positif pour tout réel x dans l'intervalle $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$ et $1 - 2x^2$ est strictement positif pour tout réel x dans l'intervalle $\left] -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[$.

Finalement :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[$.

La fonction f admet bien un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{On a : } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

La fonction f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

2. a. On a immédiatement $f(0) = 0 \times e^{-0^2} = 0$ et, d'après la première question :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

D'après ces résultats et les variations de la fonction f déterminées ci-dessus, on en déduit que la fonction f prend des valeurs positives sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, l'aire $F(a)$ cherchée vaut : $\int_0^a f(x) dx$, soit : $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a x e^{-x^2} dx$.

Pour calculer cette intégrale, on pose : $u(x) = e^{-x^2}$ qui est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout x réel on a : $u'(x) = -2x e^{-x^2}$. Ainsi, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}u(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R}_+ . On a donc :

$$F(a) = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^a = -\frac{1}{2}e^{-a^2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-0^2} \right) = \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})$$

$$F(a) = \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})$$

b. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{a \rightarrow +\infty} (-a^2) = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a^2} = 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}(1-t) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2}) = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2}$$

Partie B

1. Pour tout entier naturel n non nul, on a $[n; n+1] \subset \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[$. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[n; n+1]$ et on en déduit immédiatement :

$$\forall x \in [n; n+1], f(n) \geq f(x) \geq f(n+1).$$

D'où, en intégrant : $\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$, c'est-à-dire :

$$f(n+1) \int_n^{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \int_n^{n+1} dx, \text{ soit : } f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

2. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n). \text{ Et donc : } f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1).$$

Soit : $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$. On en déduit immédiatement : $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite u est décroissante.

3. La fonction f prenant des valeurs positives, l'inégalité $f(n+1) \leq u_n$ (cf. la question 1.) nous permet immédiatement de conclure que la suite u est minorée par 0. Comme u est minorée et décroissante (cf. la question précédente) elle converge.

A la question 1 de la partie A, on a établi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0. \text{ L'encadrement obtenu à la question 1. ci-dessus nous}$$

donne alors, en passant à la limite et en utilisant le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite u converge vers 0.

N°114 page 214

Montrer que l'on a $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ équivaut à montrer que l'on a :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \text{ et } -\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

On va utiliser le fait que pour tout x réel de $[a; b]$, on a : $f(x) \leq |f(x)|$ et $-f(x) \leq |f(x)|$ (en fait on a bien sûr $|f(x)| = f(x)$ ou $|f(x)| = -f(x)$, suivant le signe de $f(x)$, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici !).

On a : $f(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow |f(x)| - f(x) \geq 0$.

Or, la fonction f étant continue sur $[a; b]$, il en va de même de la fonction $|f|$ et de la fonction $|f| - f$.

Comme on vient de voir que la fonction $|f| - f$ prenait des valeurs positives sur $[a; b]$, on a :

$$\int_a^b (|f(x)| - f(x)) dx \geq 0.$$

La linéarité de l'intégrale nous donne alors : $\int_a^b |f(x)| dx \geq \int_a^b f(x) dx$.

On a ainsi établi la première inégalité cherchée.

La seconde inégalité se montre de façon analogue.

N°116 page 214

1. a. Pour tout réel t , on a : $e^t > 0$. On en déduit : $4e^t > 0$, $e^t + 1 > 1 > 0$ et, de fait : $f(t) > 0$.

Par ailleurs, la fonction exponentielle étant continue sur \mathbb{R} , il en va de même pour les fonctions $t \mapsto 4e^t$ et $t \mapsto e^t + 1$. Ainsi, la fonction f est continue sur \mathbb{R} comme rapport de deux fonctions continues sur \mathbb{R} .

Enfin, la fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on a, pour tout entier naturel n non nul : $n < n+1 \Leftrightarrow \ln(n) < \ln(n+1)$.

Finalement :

Pour tout entier naturel n non nul, u_n est égale à l'aire sous la courbe de la fonction f entre les droites d'équations $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$.

b. Posons $u(t) = e^t + 1$.

La fonction est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout t réel, on a : $u'(t) = e^t$.

Ainsi, pour tout t réel, on a : $f(t) = \frac{4u'(t)}{u(t)} = 4 \frac{u'(t)}{u(t)}$. Comme u prend des valeurs

strictement positives sur \mathbb{R} , on en déduit immédiatement qu'une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} est la fonction : $F(t) = 4 \ln u(t) = 4 \ln(e^t + 1)$.

Il vient alors, pour tout entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(t) dt = [F(t)]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \\ &= 4 \ln(e^{\ln(n+1)} + 1) - 4 \ln(e^{\ln(n)} + 1) \\ &= 4 \ln(n+1+1) - 4 \ln(n+1) \\ &= 4 \ln(n+2) - 4 \ln(n+1) \\ &= 4 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 4 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

2. D'après la question 1.a. :

- u_1 est égale à l'aire sous la courbe de la fonction f entre les droites d'équations $x = \ln(1) = 0$ et $x = \ln(2)$.
- u_1 est égale à l'aire sous la courbe de la fonction f entre les droites d'équations $x = \ln(2)$ et $x = \ln(3)$.
- ...
- u_{n-1} est égale à l'aire sous la courbe de la fonction f entre les droites d'équations $x = \ln(n-1)$ et $x = \ln(n)$.
- u_n est égale à l'aire sous la courbe de la fonction f entre les droites d'équations $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$.

On en déduit immédiatement, les intersections, 2 à 2, des domaines ci-dessus étant d'aires nulles, que :

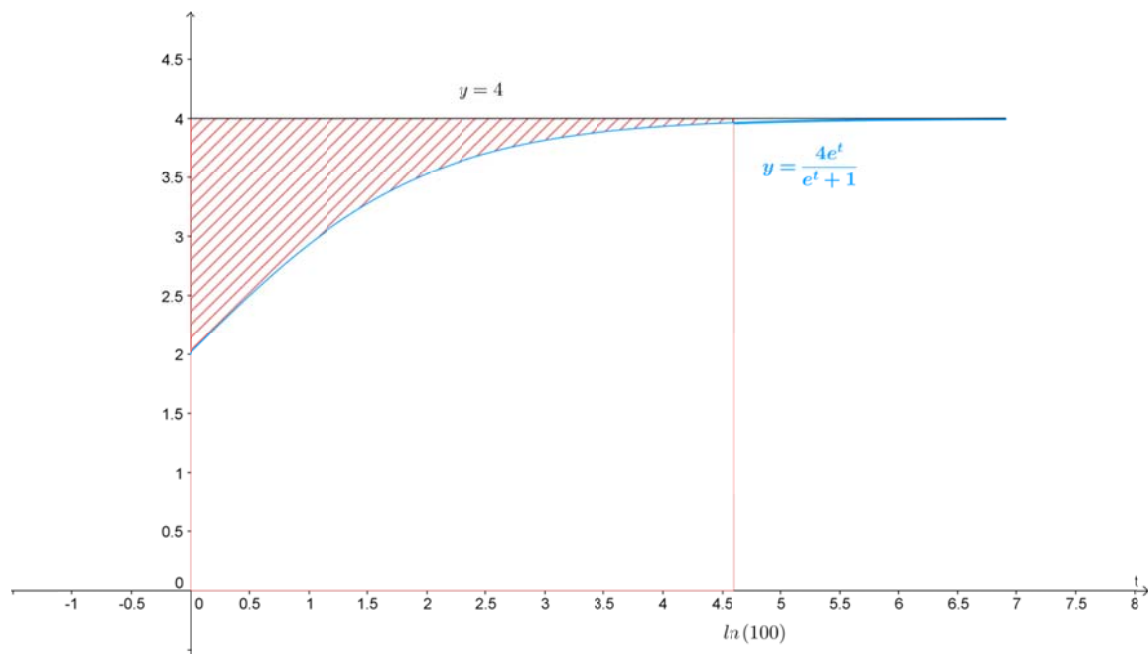
S_n est égale à l'aire sous la courbe de la fonction f
entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$.

D'après la question 1.b. on a :

$$\begin{aligned}
 S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n \\
 &= 4 \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 4 \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4 \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \dots + 4 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 4 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
 &= 4 \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1}\right) \\
 &= 4 \ln\left(\frac{n+2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 4 \ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

3. a. Nous illustrons, pour $n = 99$, la situation étudiée :



L'aire \mathcal{A}_n cherchée est celle du domaine hachuré (\mathcal{A}_{99} dans notre exemple).

Après avoir remarqué que l'on avait $\forall t \in \mathbb{R}, e^t < e^t + 1$ et donc $f(t) < 4$, il vient :

$$\mathcal{A}_n = \int_0^{\ln(n+1)} (4 - f(t)) dt$$

En tenant compte de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \int_0^{\ln(n+1)} (4 - f(t)) dt \\ &= \int_0^{\ln(n+1)} 4 dt - \int_0^{\ln(n+1)} f(t) dt \\ &= 4 \ln(n+1) - S_n \\ &= 4 \ln(n+1) - 4 \ln\left(\frac{n+2}{2}\right) \\ &= 4 \ln\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_n = 4 \ln\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)$$

b. On a immédiatement : $\frac{2(n+1)}{n+2} = 2 \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}\right) = 2$.

Comme la fonction logarithme népérien est continue en 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right) = \ln 2$.

Et finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 4 \ln(2)$$

N°119 page 215

Pour x réel dans l'intervalle $[0; 1]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$.

C'est évidemment encore vrai dans l'intervalle $\left[0; \frac{1}{n}\right] \subset [0; 1]$ pour tout entier naturel n non nul.

On en déduit alors : $\int_0^{\frac{1}{n}} m dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} M dx$, c'est-à-dire : $\frac{m}{n} \leq u_n \leq \frac{M}{n}$.

On a immédiatement, m et M étant fixés : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n} = 0$ et finalement, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
--

N°129 page 217

Comme primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x}$, on obtient facilement la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.
Il vient alors :

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_n^{n+1} = -e^{-(n+1)} - (-e^{-n}) = \frac{-1}{e^{n+1}} + \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^n} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{1}{e^n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ et, finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
--