

# Calcul intégral - TP

11 avril 2015

## N°16 page 195 - Etude d'une suite définie par une intégrale

1. On s'intéresse d'abord aux deux premiers termes de la suite.

(a) On a :  $u_0 = \int_0^1 \frac{e^{-0 \times x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx$  et  $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1 \times x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ . Il vient alors :  $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 1 \times dx = 1$ . Finalement :

$$u_0 + u_1 = 1$$

(b) Notons que la dérivée de la fonction  $x \mapsto 1 + e^{-x}$  est la fonction  $x \mapsto -e^{-x}$ . Par ailleurs, la fonction  $x \mapsto 1 + e^{-x}$  prend des valeurs strictement positives sur  $\mathbb{R}$  puisque la fonction exponentielle prend elle-même des valeurs strictement positives. C'est donc à fortiori le cas sur l'intervalle  $[0; 1]$ . Il vient alors :

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - [\ln(1 + e^{-x})]_0^1 = - \ln(1 + e^{-1}) - (- \ln(1 + e^{-0})) = - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \ln 2 = - \ln\left(\frac{e+1}{e}\right) + \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) + \ln 2 = 1 + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$

D'après le résultat de la question précédente, il vient alors :  $u_0 = 1 - u_1 = 1 - \left(1 + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\right) = - \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ . Finalement :

$$u_0 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \text{ et } u_1 = 1 + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$

2. Une formule de récurrence et un algorithme.

(a) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x} + 1)}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n} e^{-n} - \left(-\frac{1}{n} e^0\right) = \frac{1}{n} (1 - e^{-n})$ . On a bien :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

Il vient alors, avec  $n = 1$  :  $u_2 + u_1 = \frac{1-e^{-1}}{1}$ , soit  $u_2 = 1 - e^{-1} - u_1 = 1 - e^{-1} - \left(1 + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\right) = -e^{-1} - \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{1}{e}$ .

Et avec  $n = 2$  :  $u_3 + u_2 = \frac{1-e^{-2}}{2}$ , soit  $u_3 = \frac{1-e^{-2}}{2} - u_2 = \frac{1-e^{-2}}{2} - \left(\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$ .

$$u_2 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{1}{e} \text{ et } u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right).$$

- (b) Notons, dans un premier temps, que la variable  $u$  correspond au réel  $u_n$  que l'on cherche à calculer. Cette variable est initialisée à la valeur  $u_1 = 1 + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$ . La variable  $u$  est alors mise à jour dans la boucle « Pour  $i$  allant de 2 à  $n$  » via l'instruction «  $u \leftarrow \frac{1-e^{-i}}{i}$  ». Ainsi, cette boucle « se contente » de calculer successivement la valeur du rapport  $\frac{1-e^{-i}}{i}$  pour toutes les valeurs de  $i$  comprises entre 2 et  $n$ . La boucle n'implémente donc pas la relation de récurrence obtenue à la question précédente ! Pour pouvoir implémenter cette relation de récurrence, qui équivaut à  $u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n} - u_n$ , il nous faut l'instruction : «  $u \leftarrow \frac{1-e^{-i}}{i} - u$  ». Mais le calcul de  $u_2$  montre alors que cette première instruction doit être utilisée avec  $i = 1$ . Enfin, lors de la dernière exécution de la boucle, on obtiendra bien  $u_n$  comme dernière valeur de pour la variable  $u$  si la dernière exécution de l'instruction «  $u \leftarrow \frac{1-e^{-i}}{i}$  » correspondait à  $i = n - 1$ . De fait, dans la boucle, le compteur  $i$  doit varier de 1 à  $n - 1$  et non de 2 à  $n$ .

Nous pouvons donc proposer l'algorithme suivant (les modifications apparaissent en rouge) :

<p>Variables  <math>n, i</math> : entiers ; <math>u</math> : réel ;  Début  Entrer (<math>n</math>) ;  <math>u \leftarrow \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) + 1</math> ;  Pour <math>i</math> allant de 1 à <math>n - 1</math> Faire  <math>u \leftarrow \frac{1-e^{-i}}{i} - u</math> ;  Fin Pour ;  Afficher (<math>u</math>) ;  Fin.</p>
---

### 3. Utilisation d'un tableur.

- (a) Il s'agit, ici encore, de mettre en oeuvre la relation de récurrence obtenue à la question 2.(a). Comme  $u_2 = \frac{1-e^{-1}}{1} - u_1$ , on calcule  $\frac{1-e^{-n}}{n}$  pour  $n = 1$ , valeur correspondant à la cellule A3. Par ailleurs, le réel  $u_1$  correspond à la valeur de la cellule B3. Ainsi, la formule correspondant à notre calcul est : « = (1-EXP(-A3))/A3 - B3 », c'est à dire la troisième formule proposée.

La formule permettant de calculer  $u_2$  est la troisième formule proposée :

$$= (1-EXP(-A3))/A3 - B3$$

- (b) D'après les résultats obtenus avec le tableur, il semblerait que la suite  $u$  tende vers 0 (en décroissant).

4. Limite de la suite  $u$ .

- (a) Notons d'abord que l'on a, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  :  $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$ .  
 Il en découle immédiatement que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \geq 0$ , c'est à dire  $u_n \geq 0$ .  
 On a vu, à la question 2.(a), que l'on a avait, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ .  
 On en déduit :  $u_n = \frac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1}$ . Comme  $u_{n+1} \geq 0$ , il vient alors :  $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$ . Finalement :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } 0 \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

- (b) On a la limite de référence :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ . On en tire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) = 1$  et, enfin (division) :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{n} = 0$ .

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- (c) Intéressons-nous à la fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ . Elle y est dérivable comme rapport de deux fonctions dérivables et on a, pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1 :  $\varphi'(x) = \frac{e^{-x} \times x - (1-e^{-x}) \times 1}{x^2} = \frac{e^{-x} \times (x+1) - 1}{x^2}$ . On a l'inégalité classique, valable sur  $\mathbb{R}$  :  $e^x \geq x+1$  (l'égalité ayant lieu pour 0) qui donne ici :  $e^{-x} \times (x+1) < 1$  (puisque'on travaille sur  $[1; +\infty[$ ) et donc, le dénominateur de  $\varphi'(x)$  étant strictement positif :  $\varphi'(x) < 0$ . On en déduit finalement que la fonction  $\varphi$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

Le résultat de la question 4.(a) se réécrit :  $0 \leq u_n \leq \varphi(n)$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul. Pour  $n = 100$ , on a :  $\varphi(100) = \frac{1-e^{-100}}{100} < 0,01 < 0,1$ . Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 100, on a alors :  $u_n \leq \varphi(n) \leq \varphi(100) < 0,1$ . Rémi a donc raison.

$$\text{Pour tout entier } n \geq 100, \text{ on a : } u_n \leq 0,1.$$

Remarque : d'après la démarche précédente, on a en fait le résultat plus fort :  $u_n \leq 0,01\dots$  Peut-être s'agit-il d'une faute de frappe dans le livre ?