Compléments sur les fonctions.

Corrigés d'exercices

Version du 10/12/2013

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 108 : N°**45**
Page 109 : N°**53**
Page 110 : N°**57**
Page 112 : N°**69**

N°45 page 108

1. La fonction *f* est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Comme $f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = \frac{3}{4}x - 1$ et, de fait : $u'(x) = \frac{3}{4}$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}x - 1\right)^{4-1} = 3 \times \left(\frac{3}{4}x - 1\right)^3$$

> La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3 \times \left(\frac{3}{4}x - 1\right)^3$.

2. La fonction *f* est une fonction rationnelle. Son ensemble de dérivabilité est donc identique à son domaine de définition. Or, on a : $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow (1-2x)^2 \neq 0$.

   On a : $(1-2x)^2 = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

   Donc : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

   On a : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = (1-2x)^{-2}$ de la forme $(u(x))^{-2}$ avec $u(x) = 1-2x$.

   La fonction *u* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine et on a $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -2$.

   Finalement :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = -2 \times u'(x) \times (u(x))^{-2-1} = -2 \times (-2) \times (1-2x)^{-3} = \frac{4}{(1-2x)^3}$$

> La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},\ f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^3}$.

3. La fonction *f* est la composée de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$ et de la fonction racine carrée.

   Cette dernière étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f sera dérivable pour tout réel *x* tel que $\frac{x}{2} - 1 > 0$, soit $x > 2$.

   Ainsi, l'ensemble de dérivabilité de *f* est l'intervalle $\left]2\,;+\infty\right[$.

   Comme la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}$, on a, pour tout *x* réel strictement supérieur à 2 :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x}{2} - 1}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2} - 1}}$$

La fonction *f* est dérivable sur $\left]2\,;+\infty\right[$ et $\forall x \in \left]2\,;+\infty\right[,\ f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2} - 1}}$.

4. La fonction *f* est la composée de la fonction $x \mapsto 2\pi x + \frac{\pi}{4}$ et de la fonction cosinus, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

   On sait que la dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est la fonction $x \mapsto a \times f'(ax + b)$.

   Comme la dérivée de la fonction cosinus est la fonction $-$cosinus, il vient :

$$f'(x) = 2\pi \times \left[-\sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -2\pi \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2\pi \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$.

N°53 page 109

Notons d'abord que l'on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\pi}{2} + 1} = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 1}$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 1}$

Ainsi, les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* passent par le point A d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ et d'ordonnée $\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}$.
Ainsi, nous pouvons maintenant nous intéresser aux coefficients directeurs des tangentes aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en A, c'est-à-dire à $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et à $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ respectivement.

La fonction *g* est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $u' : x \mapsto 1$.
Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction g est dérivable en tout point tel que $x+1>0$, c'est-à-dire sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.
On a alors : $\forall x \in]-1\,;+\infty[,\ g'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.
Ainsi : $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}$.

Par ailleurs, on a : $f(x)=\sin x\times\sqrt{x+1}=\sin x\times g(x)$. Comme la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction *g* sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, leur produit est également dérivable sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$. On a alors :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[,\ f'(x)=\cos x\times g(x)+\sin x\times g'(x)=\cos x\times\sqrt{x+1}+\sin x\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

En particulier : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\underbrace{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{=0}\times\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}+\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ainsi, les coefficients directeurs des tangentes aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en A étant identiques, on en déduit immédiatement qu'elles sont confondues.

> Les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* admettent une tangente commune au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

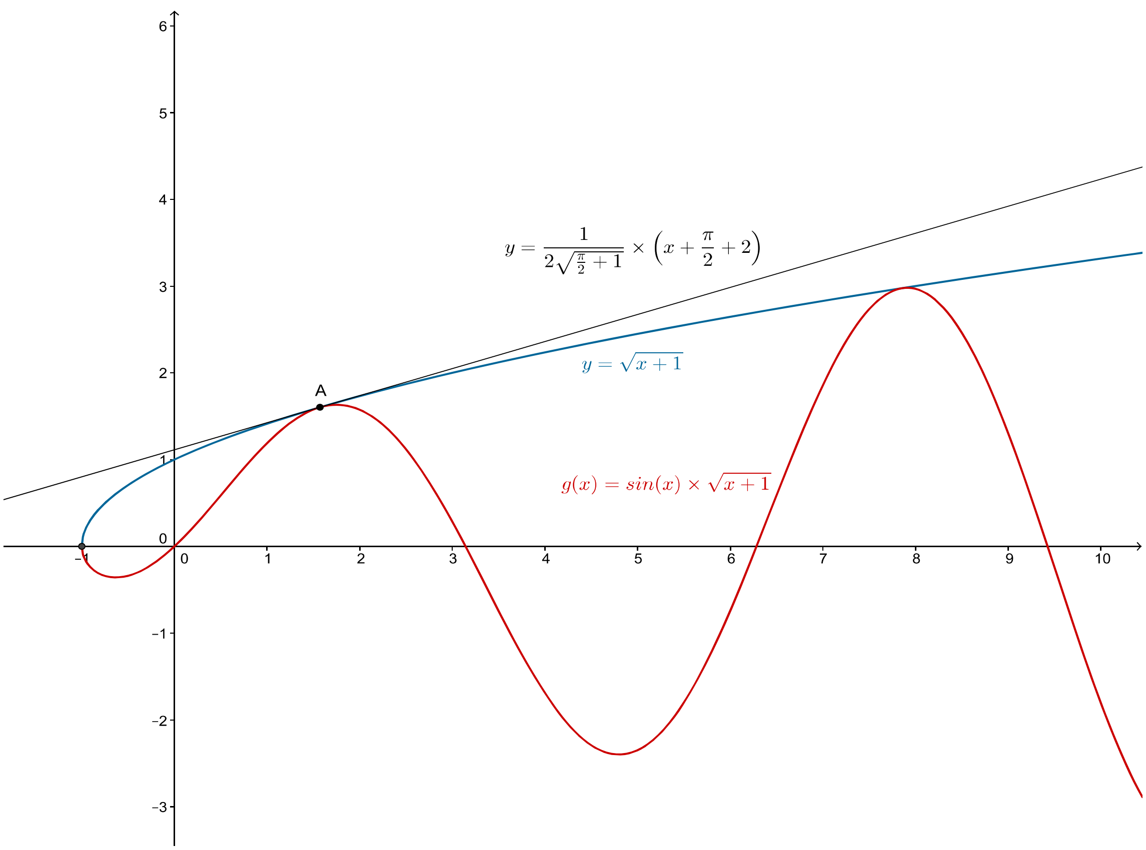
A titre de complément, notons que l'équation réduite de la tangent considérée s'écrit :

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}\times\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}$$

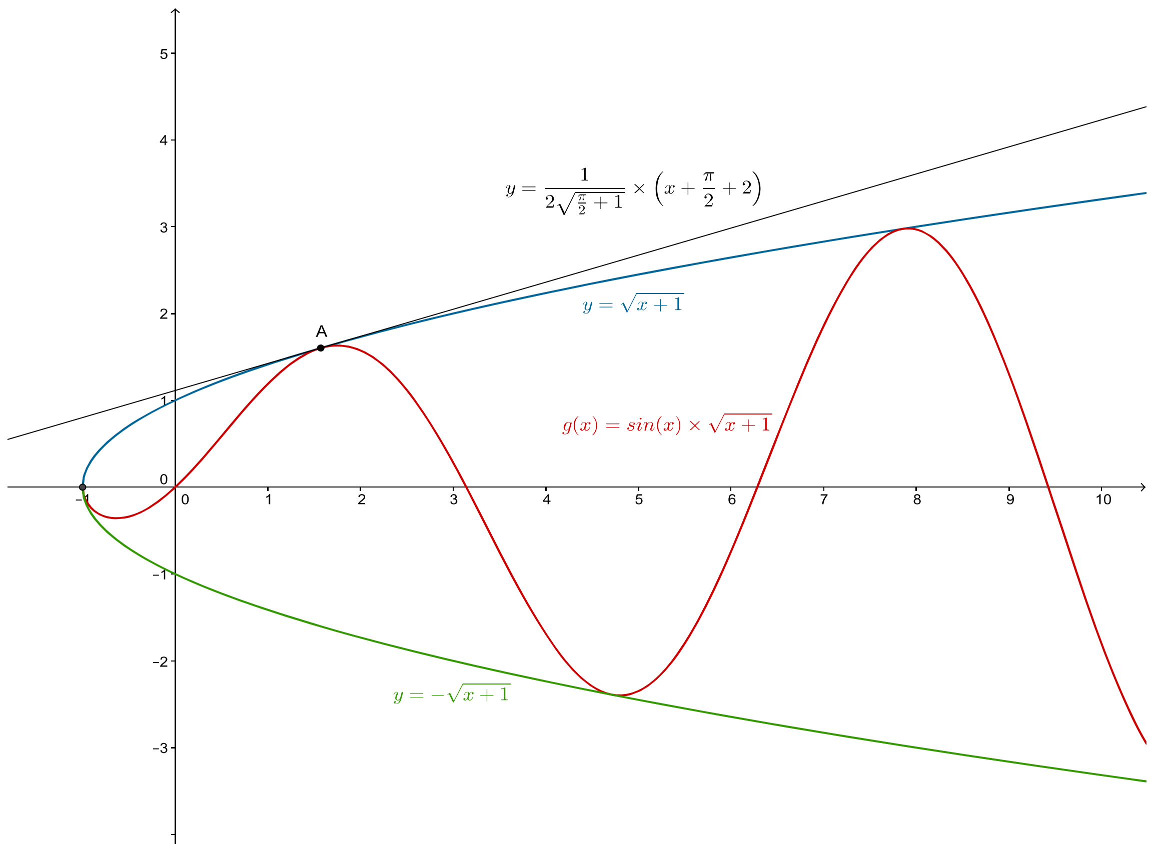
$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}\times\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}\times\left(x-\frac{\pi}{2}+\pi+2\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}\times\left(x+\frac{\pi}{2}+2\right)$$

D'où la représentation graphique :



On pourra aller plus loin en remarquant qu'il se passe des choses tout aussi intéressantes aux points d'abscisses $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) ! Et puis (vive Geogebra !) on pourra symétriser la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses et obtenir ainsi la nouvelle figure ci-après.



Les branches bleue et verte ne seraient-elles pas deux branches d'une seule et même parabole ? Bingo ! ☺

N°57 page 110

Dans cet exercice, on a affaire à des fonctions de la forme $\sqrt{u}$ avec u dérivable sur un intervalle adapté. On va donc, à chaque fois, utiliser la formule : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

1. $f(x) = \sqrt{x^3+1}$. Ici, on a : $u(x) = x^3+1$ et donc $u'(x) = 3x^2$.

   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a donc : $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$.

$$\boxed{\forall x \in [0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}$$

2. $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$. Ici, on a : $u(x)=1-\dfrac{1}{x}$. En tenant compte du fait que la fonction inverse admet pour dérivée la fonction $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, on a : $u'(x)=-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}$.

   Pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;0[$, on a donc : $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}$.

$$\boxed{\forall x\in\,]-\infty\,;0[,\ f'(x)=\dfrac{1}{2x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}}$$

3. $f(x)=\sqrt{\cos x}$. Ici, on a : $u(x)=\cos x$ et donc $u'(x)=-\sin x$.
   Pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a donc : $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

$$\boxed{\forall x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[,\ f'(x)=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}$$

N°69 page 112

1. La fonction f est définie sur $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions (le cube de la fonction cosinus et celui de la fonction sinus) définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on a donc : $x+2\pi\in\mathscr{D}_f$.
   Par ailleurs, pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
f(x+2\pi)&=\cos^3(x+2\pi)-\sin^3(x+2\pi)\\
&=\left(\cos(x+2\pi)\right)^3-\left(\sin(x+2\pi)\right)^3\\
&=\left(\cos(x)\right)^3-\left(\sin(x)\right)^3\\
&=\cos^3(x)-\sin^3(x)\\
&=f(x)
\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } 2\pi-\text{périodique.}}$$

2. *a*. Pour tout réel *x*, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\cos x\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\times\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \cos x+\sin x\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x}$$

b. Comme la dérivée de la fonction cosinus est l'opposée de la fonction sinus, la dérivée de la fonction $x\mapsto\cos^3(x)$ est la fonction $x\mapsto -3\sin(x)\times\cos^2(x)$.

De même, comme la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, la dérivée de la fonction $x\mapsto\sin^3(x)$ est la fonction $x\mapsto 3\cos(x)\times\sin^2(x)$.

Finalement, pour tout *x* réel, on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3\sin(x)\cos^2(x)-3\cos(x)\sin^2(x)\\ &= -3\sin(x)\cos(x)\left[\cos(x)+\sin(x)\right]\end{aligned}$$

Soit, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3\sin(x)\cos(x)\left[\cos(x)+\sin(x)\right]\\ &= -3\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-3\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. On veut étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
Les facteurs $\sin(x)$ et $\cos(x)$ ci-dessus ne posent pas de problème (on se réfère directement au cours sur les fonctions sinus et cosinus).
Reste à étudier le signe de $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
On a $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ où $k\in\mathbb{Z}$.
Mais on a, pour tout entier *k* :

$$x-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right[$$

Soit, finalement : $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Sur l'intervalle $\left[-\pi\,;\,\pi\right]$, on a donc : $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[$.

De ce qui précède, on tire le tableau de signes :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\sin x$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0
$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	**0**	**+**	**0**	**–**	**0**	**+**	**0**	**–**	**0**	**+**	**0**	**–**	**0**

Pour pouvoir donner le tableau de signe complet de *f* sur l'intervalle $\left[-\pi\,;\,\pi\right]$, on calcule les valeurs particulières de *f* :

$$f(-\pi)=f(\pi)=\cos^3(\pi)-\sin^3(\pi)=(-1)^3-0=-1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0^3-(-1)^3=1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(0)=\cos^3(0)-\sin^3(0)=1^3-0^3=1$$

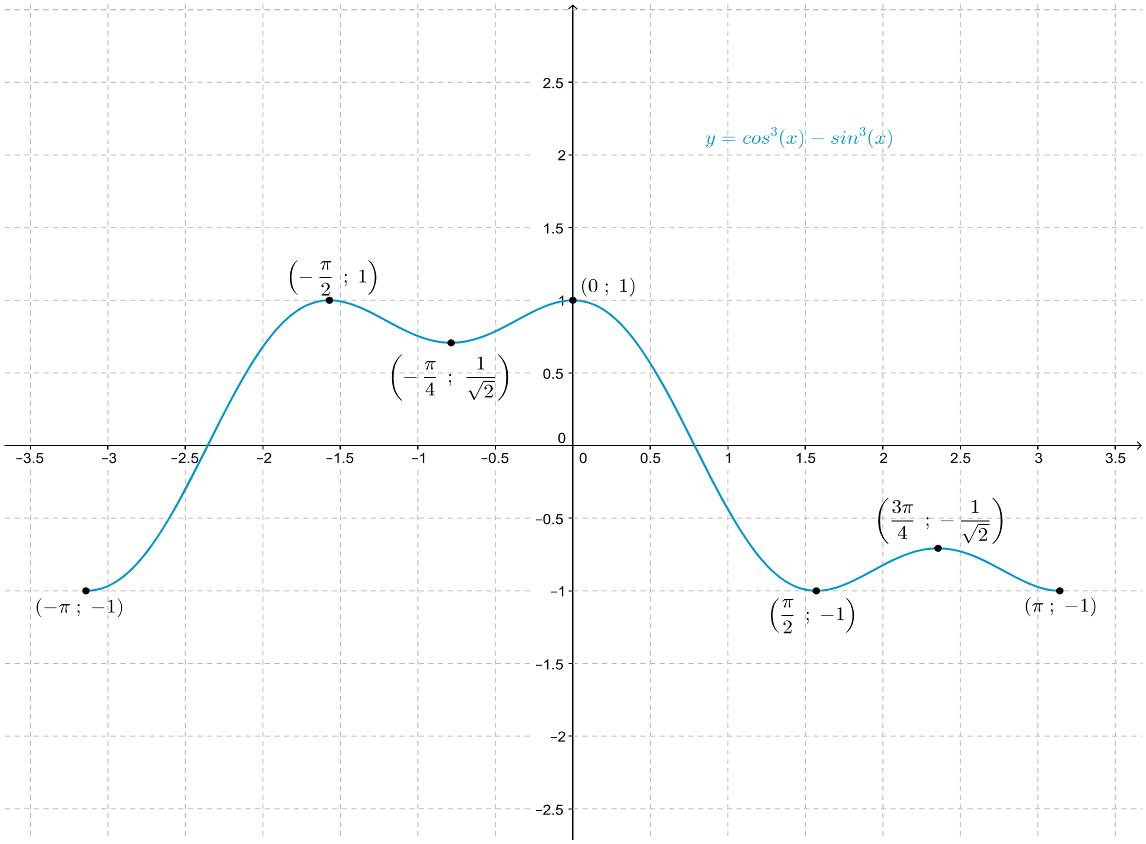
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)=0^3-1^3=-1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^3\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sin^3\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nous pouvons désormais dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
f	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1

4.



5. *a*. On a, en développant :

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3+\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2}-b^3=a^3-b^3$$

Pour tous réels *a* et *b*, on a : $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$

b. On a, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos^3(x)-\sin^3(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos(x)-\sin(x)\right)\left(\cos^2(x)+\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos(x)-\sin(x)\right)\left(1+\cos(x)\sin(x)\right)=0$$

A la question 2.*a*. on a établi : $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

En remplaçant « x » par « $-x$ », il vient alors : $\sqrt{2}\cos\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos(-x)+\sin(-x)$, c'est-à-dire :

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Par ailleurs, $\cos(x)\sin(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$. On a donc :

$$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin(2x)\right)=0$$

On a ainsi obtenu une équation produit et on a classiquement :

$$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin(2x)\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\text{ ou }1+\frac{1}{2}\sin(2x)=0$$

On a d'abord :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$$

Puis :

$$1+\frac{1}{2}\sin(2x)=0\Leftrightarrow\sin(2x)=-2$$

Cette équation n'admet pas de solution.

Finalement :

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=0$ est $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.