

---

# Compléments sur les fonctions.

Corrigés d'exercices

Version du 11/11/2014

---

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 104 : N°22, 23

Page 105 : N°25, 27

Page 106 : N°37

Page 107 : N°39

Page 108 : N°45

Page 109 : N°53

Page 110 : N°57

Page 112 : N°69

Page 116 : N°79, 80, 82

## N°22 page 104

1. On a facilement :  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\sin x$

2. On a facilement :  $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. On a facilement :  $f'(x) = -3\sin x - 2\cos x + 1$

## N°23 page 104

Dans cet exercice, on dérive des produits de fonctions.

1.  $f'(x) = 2x \times \cos x + x^2 \times (-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$

2.  $f'(x) = (3x^2 + 4x) \times \sin x + (x^3 + 2x^2 + 1) \times \cos x = (3x + 4)x \sin x + (x^3 + 2x^2 + 1) \cos x$

3.  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos x + \sqrt{x} \times (-\sin x) = \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{x}}$

## N°25 page 105

1. Pour tout réels  $x$ , on a :  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

On en déduit alors immédiatement :  $x^3 + 3x - 1 \leq x^3 + 3x + \sin x \leq x^3 + 3x + 1$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 3x - 1 \leq x^3 + 3x + \sin x \leq x^3 + 3x + 1$$

2. Pour tout  $x$  réel non nul, on a :

$$x^3 + 3x - 1 = x^3 \left( 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \text{ et } x^3 + 3x + 1 = x^3 \left( 1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{addition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{multiplication} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty \end{array}$$

C'est-à-dire :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + 1) = -\infty$ .

Comme  $x^3 + 3x + \sin x \leq x^3 + 3x + 1$ , il vient alors (théorème de comparaison) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + \sin x) = -\infty$$

De façon similaire, on montre :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x - 1) = +\infty$ .

Comme  $x^3 + 3x - 1 \leq x^3 + 3x + \sin x$ , il vient alors (théorème de comparaison) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x + \sin x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + \sin x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x + \sin x) = +\infty$$

**N°27 page 105**

1. Pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \cos x \leq 1$  et donc  $x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ , on en déduit immédiatement (théorème de comparaison (minoration)) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x) = +\infty$$

2. Pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Alors, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient immédiatement (théorème des gendarmes) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

3. Pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Alors, pour tout réel  $x$  positif, on a :

$$-1 - \sqrt{x} \leq \sin x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{x}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{x}) = -\infty$  et on en déduit immédiatement (théorème de comparaison (majoration)) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - \sqrt{x}) = -\infty$$

### **N°37 page 106**

1. C'est **FAUX** !

La fonction  $x \mapsto \sin(2x)$  admet pour fonction dérivée sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $x \mapsto 2 \cos(2x)$ .

2. C'est **FAUX** !

La fonction  $x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$  admet pour fonction dérivée sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$x \mapsto -3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

3. C'est **VRAI** !

4. C'est **VRAI** !

On peut le justifier de diverses façons.

En notant que pour tout  $x$  réel, on a :  $\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = \sin x$ , le résultat est immédiat.

On peut aussi commencer par dériver la fonction. On obtient :  $x \mapsto -\cos(\pi - x)$ .

Or :  $-\cos(\pi - x) = -[\cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x] = \cos x$ . On retrouve le résultat précédent.

**N°39 page 107**

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée d'une fonction linéaire ( $x \mapsto 2x$ ) et de la fonction sinus, toutes deux dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = 2 \cos(2x)$ .

Ainsi, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse

$\frac{\pi}{2}$  est :

$$\begin{aligned} y &= f' \left( \frac{\pi}{2} \right) \times \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + f \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \times \cos \left( 2 \times \frac{\pi}{2} \right) \times \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \times \cos \pi \times \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + 0 \\ &= -2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -2x + \pi \end{aligned}$$

Réponse c.

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme (toute puissance d'exposant un entier naturel d'une fonction polynôme est encore une fonction polynôme).

On a :  $f = u^3$  avec  $u : x \mapsto (1 - 2x)$ . Ainsi :  $f' = 3u'u^2$ , soit :

$$f'(x) = 3u'(x)(u(x))^2 = 3 \times (-2) \times (1 - 2x)^2 = 6(1 - 2x)^2$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1) \times (x - 1) + f(1) \\ &= 6 \times (1 - 2 \times 1)^2 \times (x - 1) + (1 - 2 \times 1)^3 \\ &= 6 \times (-1)^2 \times (x - 1) + (-1)^3 \\ &= 6 \times (x - 1) - 1 \\ &= 6x - 7 \end{aligned}$$

Réponse b.

3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée d'une fonction affine ( $x \mapsto 3x + \frac{\pi}{4}$ ) et de la fonction cosinus, toutes deux dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = -3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Ainsi, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0 est :

$$\begin{aligned}y &= f'(0) \times (x - 0) + f(0) \\&= -3 \sin\left(3 \times 0 + \frac{\pi}{4}\right) \times x + \cos\left(3 \times 0 + \frac{\pi}{4}\right) \\&= -3 \sin \frac{\pi}{4} \times x + \cos \frac{\pi}{4} \\&= -3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times x + \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= -\frac{3\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Réponse b.

4. La fonction racine carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi, la fonction  $f$  sera dérivable en tout point tel que  $3x - 1 > 0$ , c'est-à-dire sur  $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ .

Ainsi, de la même façon que la tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point d'abscisse 0 est verticale (d'équation  $x = 0$ ), il en ira de même pour la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse  $\frac{1}{3}$ . Son équation

sera donc :  $x = \frac{1}{3}$ .

On peut établir ce résultat :

- Géométriquement en soulignant que la courbe représentative de la fonction  $f$  s'obtient à partir de celle de la fonction racine carrée en effectuant une translation de vecteur  $\frac{1}{3}\vec{i}$ .

- Analytiquement en notant que pour tout réel  $h$  strictement positif, on a :

$$\frac{f\left(\frac{1}{3} + h\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{h} = \frac{\sqrt{3\left(\frac{1}{3} + h\right) - 1}}{h} = \frac{\sqrt{3h}}{h} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h}}$$

$$\text{Il vient alors : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f\left(\frac{1}{3} + h\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{h} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

On retrouve le résultat (tangente verticale).

**N°45 page 108**

1. La fonction  $f$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $f(x) = (u(x))^4$  avec  $u(x) = \frac{3}{4}x - 1$  et, de fait :  $u'(x) = \frac{3}{4}$ , il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}x - 1\right)^{4-1} = 3 \times \left(\frac{3}{4}x - 1\right)^3$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3 \times \left(\frac{3}{4}x - 1\right)^3$ .

2. La fonction  $f$  est une fonction rationnelle. Son ensemble de dérivabilité est donc identique à son domaine de définition. Or, on a :  $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (1-2x)^2 \neq 0$ .

$$\text{On a : } (1-2x)^2 = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc : } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

On a :  $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = (1-2x)^{-2}$  de la forme  $(u(x))^{-2}$  avec  $u(x) = 1-2x$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction affine et on a  $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -2$ .

Finalement :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = -2 \times u'(x) \times (u(x))^{-2-1} = -2 \times (-2) \times (1-2x)^{-3} = \frac{4}{(1-2x)^3}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}, f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^3}$ .

3. La fonction  $f$  est la composée de la fonction  $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$  et de la fonction racine carrée.

Cette dernière étant dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $f$  sera dérivable pour tout réel  $x$  tel que

$$\frac{x}{2} - 1 > 0, \text{ soit } x > 2.$$

Ainsi, l'ensemble de dérivabilité de  $f$  est l'intervalle  $]2; +\infty[$ .

Comme la dérivée de la fonction  $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$  est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2}$ , on a, pour tout  $x$  réel strictement supérieur à 2 :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x}{2}-1}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]2; +\infty[$  et  $\forall x \in ]2; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$ .

4. La fonction  $f$  est la composée de la fonction  $x \mapsto 2\pi x + \frac{\pi}{4}$  et de la fonction cosinus, toutes deux dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

On sait que la dérivée de la fonction  $x \mapsto f(ax+b)$  est la fonction  $x \mapsto a \times f'(ax+b)$ .

Comme la dérivée de la fonction cosinus est la fonction  $-\cosinus$ , il vient :

$$f'(x) = 2\pi \times \left[ -\sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \right] = -2\pi \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -2\pi \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**N°53 page 109**

Notons d'abord que l'on a :  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\pi}{2}+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}+1}$  et  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}+1}$

Ainsi, les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  passent par le point A d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$  et

d'ordonnée  $\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}$ .

Ainsi, nous pouvons maintenant nous intéresser aux coefficients directeurs des tangentes aux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  en A, c'est-à-dire à  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$  et à  $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$  respectivement.

La fonction  $g$  est de la forme  $\sqrt{u}$  avec  $u : x \mapsto x+1$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et de dérivée  $u' : x \mapsto 1$ . Comme la fonction racine carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que la fonction  $g$  est dérivable en tout point tel que  $x+1 > 0$ , c'est-à-dire sur l'intervalle  $] -1; +\infty[$ .

On a alors :  $\forall x \in ]-1; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ .

Ainsi :  $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}$ .

Par ailleurs, on a :  $f(x) = \sin x \times \sqrt{x+1} = \sin x \times g(x)$ . Comme la fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$ , leur produit est également dérivable sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$ . On a alors :

$$\forall x \in ]-1; +\infty[ , f'(x) = \cos x \times g(x) + \sin x \times g'(x) = \cos x \times \sqrt{x+1} + \sin x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

En particulier :  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}+1} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} = g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

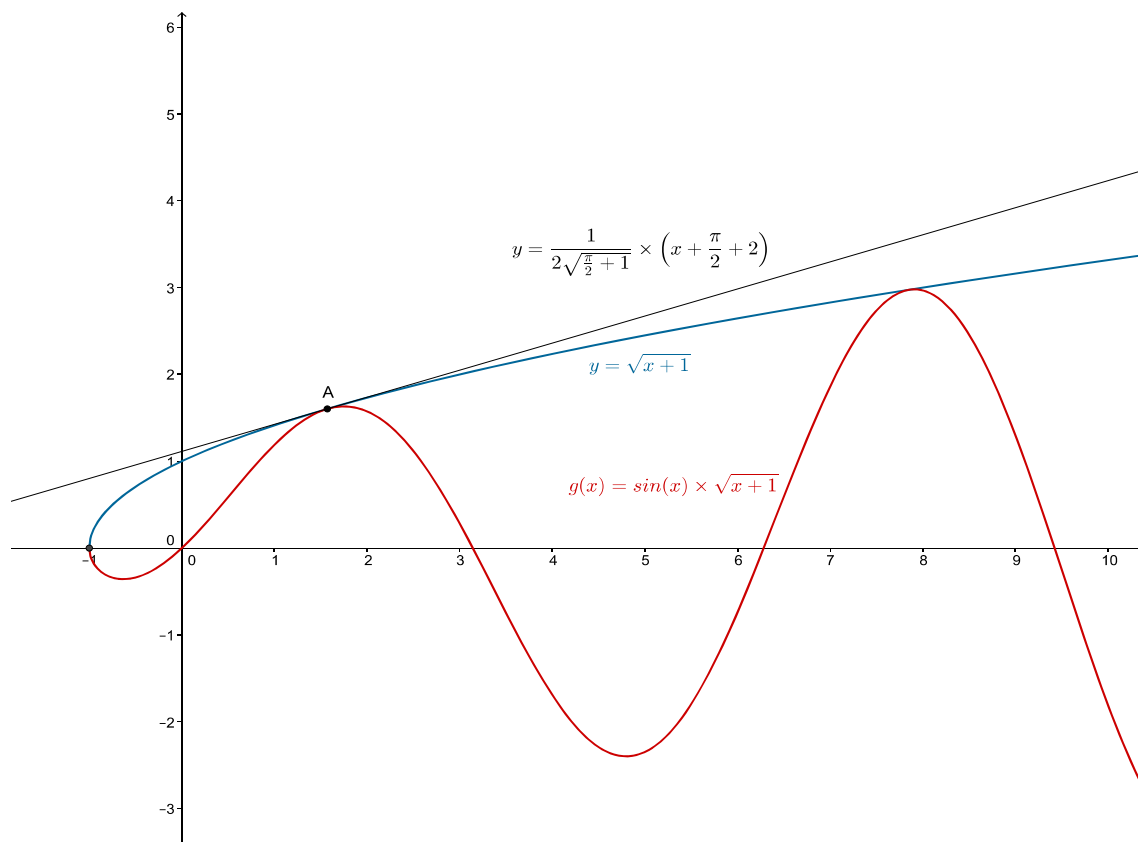
Ainsi, les coefficients directeurs des tangentes aux courbes  $\mathcal{E}_f$  et  $\mathcal{E}_g$  en A étant identiques, on en déduit immédiatement qu'elles sont confondues.

Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  admettent une tangente commune  
au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$ .

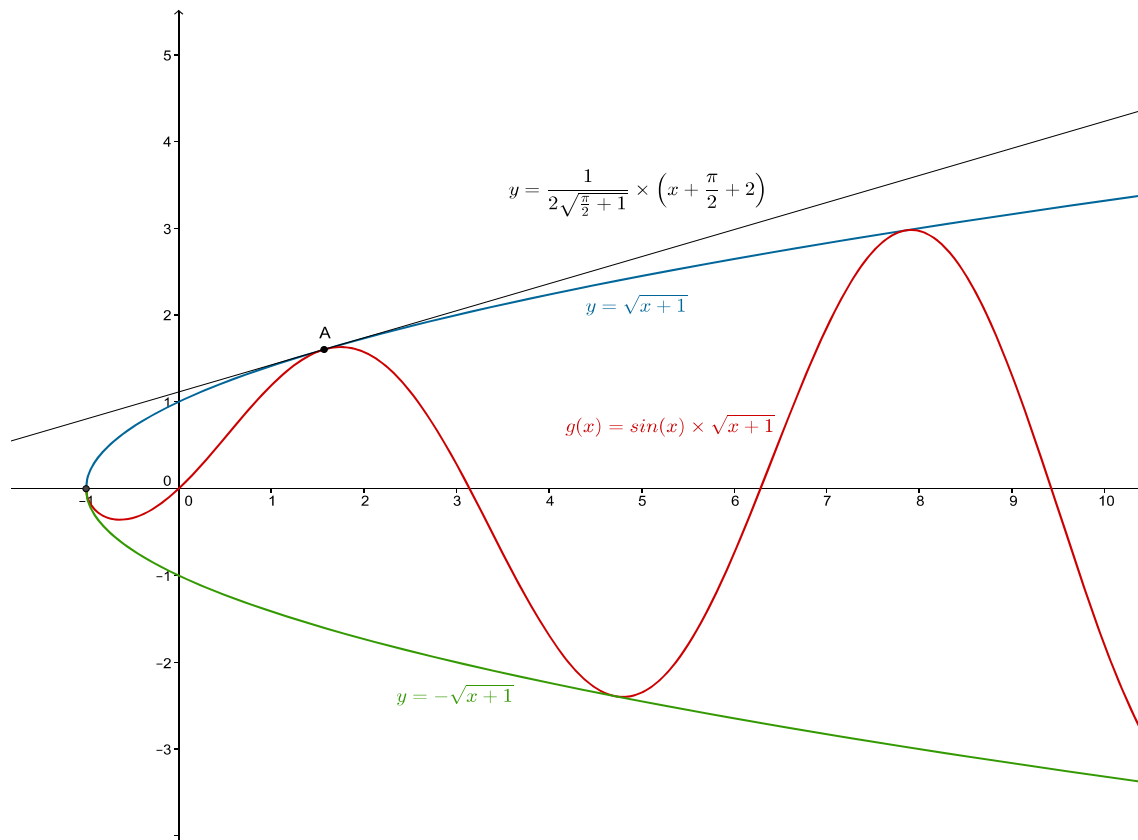
A titre de complément, notons que l'équation réduite de la tangente considérée s'écrit :

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}+1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} \times \left[ \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \right] = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} \times \left(x - \frac{\pi}{2} + \pi + 2\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} \times \left(x + \frac{\pi}{2} + 2\right) \end{aligned}$$

D'où la représentation graphique :



On pourra aller plus loin en remarquant qu'il se passe des choses tout aussi intéressantes aux points d'abscisses  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) ! Et puis (vive Geogebra !) on pourra symétriser la courbe  $\mathcal{E}_f$  par rapport à l'axe des abscisses et obtenir ainsi la nouvelle figure ci-après.



Les branches bleue et verte ne seraient-elles pas deux branches d'une seule et même parabole ? Bingo ! ☺

**N°57 page 110**

Dans cet exercice, on a affaire à des fonctions de la forme  $\sqrt{u}$  avec  $u$  dérivable sur un intervalle adapté. On va donc, à chaque fois, utiliser la formule :  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

1.  $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ . Ici, on a :  $u(x) = x^3 + 1$  et donc  $u'(x) = 3x^2$ .

Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on a donc :  $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$ .

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$$

2.  $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ . Ici, on a :  $u(x) = 1 - \frac{1}{x}$ . En tenant compte du fait que la fonction inverse admet pour dérivée la fonction  $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ , on a :  $u'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$ .

Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] -\infty ; 0[$ , on a donc :  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$ .

$$\forall x \in ] -\infty ; 0[ , f'(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

3.  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ . Ici, on a :  $u(x) = \cos x$  et donc  $u'(x) = -\sin x$ .  
Pour tout  $x$  de l'intervalle  $\left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$ , on a donc :  $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ .

$$\forall x \in \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[ , f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

### **N°69 page 112**

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$  comme différence de deux fonctions (le cube de la fonction cosinus et celui de la fonction sinus) définies sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x$  réel, on a donc :  $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$ .

Par ailleurs, pour tout  $x$  réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \cos^3(x + 2\pi) - \sin^3(x + 2\pi) \\ &= (\cos(x + 2\pi))^3 - (\sin(x + 2\pi))^3 \\ &= (\cos(x))^3 - (\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) - \sin^3(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

2. a. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left( \cos x \times \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \times \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \cos x + \sin x\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$$

b. Comme la dérivée de la fonction cosinus est l'opposée de la fonction sinus, la dérivée de la fonction  $x \mapsto \cos^3(x)$  est la fonction  $x \mapsto -3\sin(x) \times \cos^2(x)$ .

De même, comme la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, la dérivée de la fonction  $x \mapsto \sin^3(x)$  est la fonction  $x \mapsto 3\cos(x) \times \sin^2(x)$ .

Finalement, pour tout  $x$  réel, on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3\sin(x)\cos^2(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ &= -3\sin(x)\cos(x) [\cos(x) + \sin(x)]\end{aligned}$$

Soit, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3\sin(x)\cos(x) [\cos(x) + \sin(x)] \\ &= -3\sqrt{2} \sin(x)\cos(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3\sqrt{2} \sin(x)\cos(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

3. On veut étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

Les facteurs  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$  ci-dessus ne posent pas de problème (on se réfère directement au cours sur les fonctions sinus et cosinus).

Reste à étudier le signe de  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

On a  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Mais on a, pour tout entier  $k$  :

$$x - \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[ \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[$$

Soit, finalement :  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ , on a donc :  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$ .

De ce qui précède, on tire le tableau de signes :

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$		
$\cos x$	-	0	+	+	0	-	-		
$\sin x$	0	-	-	0	+	+	0		
$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	-	-	0	+	+	0	-		
$f'(x)$	<b>0</b>	<b>+</b>	<b>0</b>	<b>-</b>	<b>0</b>	<b>+</b>	<b>0</b>	<b>-</b>	<b>0</b>

Pour pouvoir donner le tableau de signe complet de  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ , on calcule les valeurs particulières de  $f$  :

$$f(-\pi) = f(\pi) = \cos^3(\pi) - \sin^3(\pi) = (-1)^3 - 0 = -1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0^3 - (-1)^3 = 1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(0) = \cos^3(0) - \sin^3(0) = 1^3 - 0^3 = 1$$

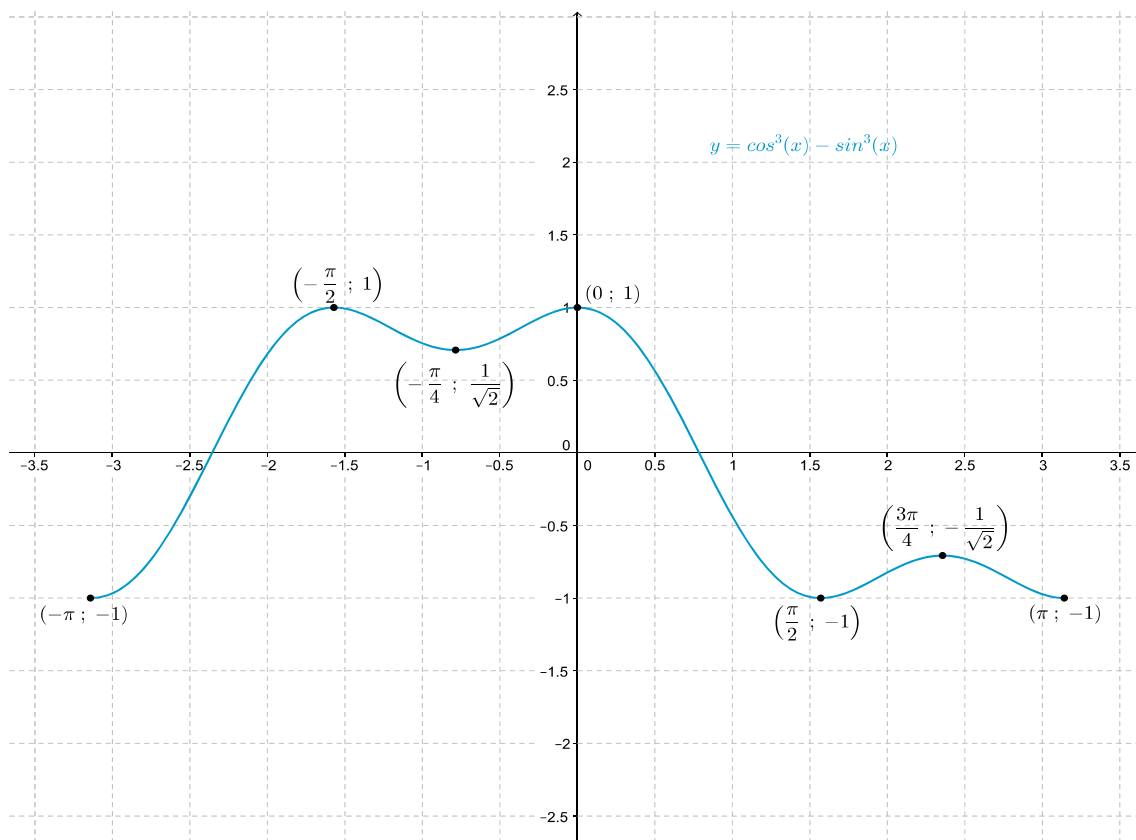
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0^3 - 1^3 = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nous pouvons désormais dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$		
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$f$	-1	↗ 1	↘ $\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗ 1	↘ -1	↗ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘ -1		

4.



5. a. On a, en développant :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$$

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

b. On a, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^3(x) - \sin^3(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos(x) - \sin(x))(\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos(x) - \sin(x))(1 + \cos(x)\sin(x)) &= 0 \end{aligned}$$

A la question 2.a. on a établi :  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$ .

En remplaçant «  $x$  » par «  $-x$  », il vient alors :  $\sqrt{2} \cos\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(-x) + \sin(-x)$ ,  
c'est-à-dire :

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Par ailleurs,  $\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ . On a donc :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) = 0$$

On a ainsi obtenu une équation produit et on a classiquement :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ou } 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

On a d'abord :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Puis :

$$1 + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -2$$

Cette équation n'admet pas de solution.

Finalement :

$$\text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ est } \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

### **N°79 page 116**

La quatre premières égalités que nous allons obtenir ci-dessous correspondent à des propriétés fondamentales des fonctions sinus et cosinus et vous devez être capables de les retrouver très rapidement, soit par le calcul (comme ci-dessous), soit à l'aide du cercle trigonométrique.

Ici, nous utiliserons les deux égalités classiques (à connaître par cœur) :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Remarque : on retrouve facilement la seconde égalité à partir de la première en écrivant :

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + (-b)\right)$$

et en utilisant des propriétés fondamentales du sinus et du cosinus.

On a :

$$\begin{aligned}\sin(x+\pi) &= \sin x \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + \cos x \underbrace{\sin \pi}_{=0} = \boxed{-\sin x} \\ \cos(\pi-x) &= \cos(\pi+(-x)) = \cos \pi \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x} - \sin \pi \sin(-x) = \boxed{-\cos x} \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos x \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = \boxed{\cos x} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos(-x) - \sin \frac{\pi}{2} \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x} = \boxed{\sin x} \\ \cos(-x) + \cos x &= \cos x + \cos x = \boxed{2\cos x} \\ \sin(-x) - \sin x &= -\sin x - \sin x = \boxed{-2\sin x}\end{aligned}$$

**N°80 page 116**

$$\rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$$

Nécessairement, on a  $x > 0$  (sans quoi son sinus, sur  $]-\pi; \pi]$ , est négatif).

On a  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  et  $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ . Comme la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , il vient finalement :

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$\rightarrow \cos x < 0$$

La fonction cosinus prend des valeurs strictement négative sur tout intervalle de la forme

$$\left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[ \text{ où } k \text{ est un entier quelconque } (k \in \mathbb{Z}).$$

Avec  $k = -1$ , on obtient l'intervalle :  $\left] -\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} \right[$  et avec  $k = 0$ , on obtient l'intervalle

$$\left] \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right[. \text{ Comme on a : } -\frac{3\pi}{2} < -\pi < -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{3\pi}{2}, \text{ on en déduit finalement :}$$

$$\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\pi ; -\frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[$$

$$\rightarrow \sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nécessairement, on a  $x < 0$  (sans quoi son sinus, sur  $]-\pi ; \pi]$ , est positif).

On a  $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Comme la fonction

sinus est strictement décroissante sur l'intervalle  $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$  et strictement croissante sur

l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ , il vient finalement :

$$\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4}\right]$$

### **N°82 page 116**

Rappelons que l'on a :

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \frac{3\pi}{4} \\ \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{2} &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3x - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) &= -\cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{x}{2} = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{7\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ x = -\frac{7\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$