Les nombres complexes.

Corrigés d'exercices

Version du 04/03/2015

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°68 page 244

1. **Réponse b**

On a : $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. **Réponse a**

On a :

$$-2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\right] = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

3. **Réponse a**

On a : $\left|-3e^{i\theta}\right| = |-3| \times \left|e^{i\theta}\right| = 3 \times 1 = 3$.

4. **Réponse c**

On a : $\overline{z} = \overline{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \overline{2} \times \overline{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 2 \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

N°79 page 247

1. Soit $iy,\ y\in\mathbb{R}$, un imaginaire pur.
   iy est solution de (E) si, et seulement si : $(iy)^3+(-8+i)\times(iy)^2+(17-8i)\times iy+17i=0$.
   On a :

$$\begin{aligned}
&(iy)^3+(-8+i)\times(iy)^2+(17-8i)\times iy+17i=0\\
\Leftrightarrow\ &-iy^3+(-8+i)\times(-y^2)+17iy+8y+17i=0\\
\Leftrightarrow\ &-iy^3+8y^2-iy^2+17iy+8y+17i=0\\
\Leftrightarrow\ &8y^2+8y+i(-y^3-y^2+17y+17)=0\\
\Leftrightarrow\ &8y(y+1)+i(-y^2(y+1)+17(y+1))=0\\
\Leftrightarrow\ &8y(y+1)+i(y+1)(-y^2+17)=0\\
\Leftrightarrow\ &(y+1)\times\left[8y+i(-y^2+17)\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &y+1=0 \text{ ou } 8y+i(-y^2+17)\\
\Leftrightarrow\ &y=-1 \text{ ou } \begin{cases} 8y=0\\ -y^2+17=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &y=-1 \text{ ou } \begin{cases} y=0\\ 17=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &y=-1
\end{aligned}$$

L'équation (E) admet donc pour solution l'imaginaire pur $-i$.

2. Le fait que $-i$ soit solution de l'équation (E) permet de factoriser
   $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$ par $z-(-i)=z+i$ et on a :

$$\begin{aligned}
&\forall z\in\mathbb{C},\ z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2+az+b)\\
\Leftrightarrow\ &\forall z\in\mathbb{C},\ z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=z^3+(a+i)z^2+(ai+b)z+ib\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} -8+i=a+i\\ 17-8i=ai+b\\ 17i=ib\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a=-8\\ b=17\end{cases}
\end{aligned}$$

   Finalement :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$$

3. En utilisant la factorisation obtenue à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} & z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0 \\ \Leftrightarrow\ & (z+i)(z^2-8z+17)=0 \\ \Leftrightarrow\ & z=-i \text{ ou } z^2-8z+17=0 \end{aligned}$$

Résolvons alors l'équation $z^2-8z+17=0$.

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.
Le discriminant vaut : $\Delta=(-8)^2-4\times1\times17=64-68=-4<0$.
Les racines complexes conjuguées s'écrivent alors :

$$z_1=\frac{-(-8)-i\sqrt{-(-4)}}{2\times1}=\frac{8-2i}{2}=4-i \text{ et } z_2=\overline{z_1}=4+i$$

Finalement :

L'ensemble des solutions de l'équation $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$ est :
$\mathscr{S}=\{-i\,;4-i\,;4+i\}$

N°81 page 248

1. On a : $(1+i)^6=\left((1+i)^2\right)^3=(1+2i-1)^3=(2i)^3=2^3\times i^3=8\times(-i)=-8i$.

$$(1+i)^6=-8i$$

2. a. $(1+i)^6=-8i \Leftrightarrow \left((1+i)^3\right)^2=-8i$.
On en déduit que $(1+i)^3=(1+i)\times(1+i)^2=2i\times(1+i)=2\times(-1+i)$ est solution de l'équation (E).

$2\times(-1+i)$ est solution de l'équation (E).

b. $2\times(-1+i)=-2+2i$ est solution de l'équation (E). Comme deux nombres opposés admettent le même carré, on en déduit que $-(-2+2i)=2-2i$ est aussi une solution de l'équation (E).

On en déduit, en admettant que l'équation (E) possède deux solutions :

Les solutions de l'équation (E) sont $-2+2i$ et $2-2i$.

3. a. $(1+i)^6=-8i \Leftrightarrow \left((1+i)^2\right)^3=-8i$.

On en déduit que $(1+i)^2=1+2i-1=2i$ est solution de l'équation (E').

$t=2i$ est solution de l'équation (E')

b. On a : $(jt)^3=j^3t^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3\times(-8i)=-8i\times e^{i\frac{2\pi}{3}\times 3}=-8i\times e^{2i\pi}=-8i$.

On en déduit ainsi que jt est aussi une solution de l'équation (E').

On a aussi : $(j^2t)^3=j^6t^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^6\times(-8i)=-8i\times e^{i\frac{2\pi}{3}\times 6}=-8i\times e^{4i\pi}=-8i$.

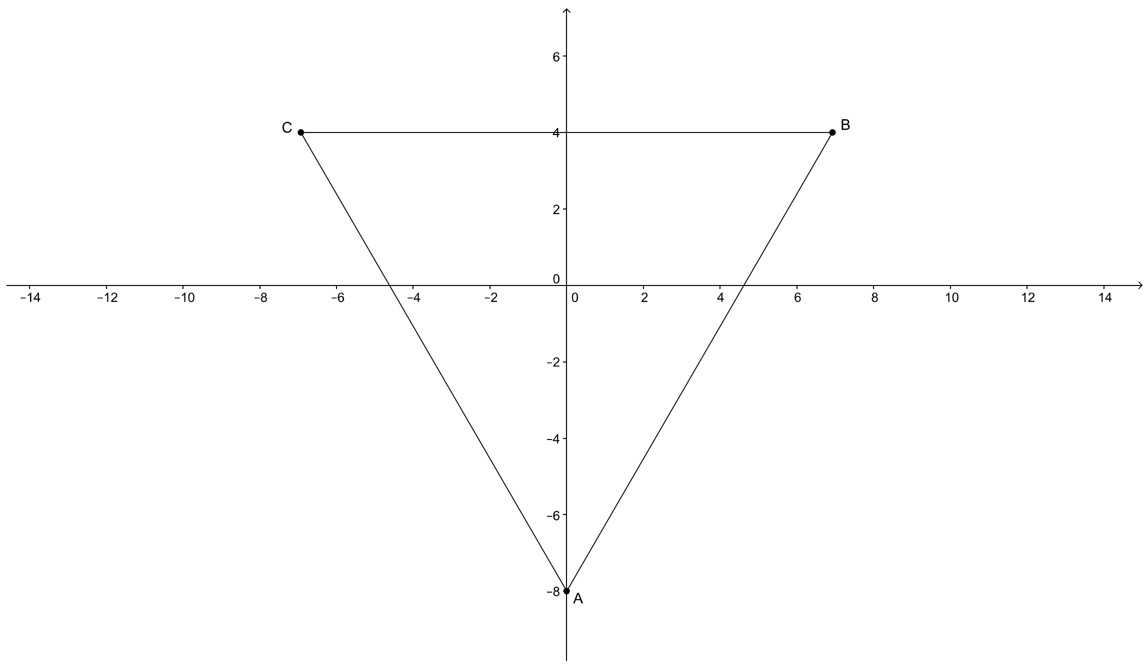
On en déduit également que le complexe j^2t est solution de l'équation (E').

Les complexes jt et j^2t sont solutions de l'équation (E').

4. a. On a d'abord : $t=-8i=8\times(-i)=8e^{-i\frac{\pi}{2}}$ puis : $jt=8e^{-i\frac{\pi}{2}}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=8e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}=8e^{i\frac{\pi}{6}}$ et enfin : $j^2t=8e^{-i\frac{\pi}{2}}\times e^{i\frac{4\pi}{3}}=8e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}=8e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$t=8e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $jt=8e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $j^2t=8e^{i\frac{5\pi}{6}}$

On obtient alors facilement dans le plan complexe les points A, B et C (cf. la figure page suivante).



b. Notons d'abord que l'on a : $|t|=\left|8e^{-i\frac{\pi}{2}}\right|=8$, $|jt|=\left|8e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=8$ et $|j^2t|=\left|8e^{i\frac{5\pi}{6}}\right|=8$.

Les points A, B et C appartiennent donc à un même cercle de centre O et de rayon 8 (ATTENTION ! Ceci ne prouve en rien que le triangle ABC soit équilatéral !).

On a classiquement :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\text{OA}},\overrightarrow{\text{OB}}\right)&=\left(\overrightarrow{\text{OA}},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{\text{OB}}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{\text{OB}}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{\text{OA}}\right)\\&=\arg\left(z_{\overrightarrow{\text{OB}}}\right)-\arg\left(z_{\overrightarrow{\text{OA}}}\right)=\arg\left(z_{\text{B}}\right)-\arg\left(z_{\text{A}}\right)\\&=\arg\left(jt\right)-\arg\left(t\right)\end{aligned}$$

Or : $\arg\left(jt\right)=\arg\left(8e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{\pi}{6}\left(2\pi\right)$ et $\arg\left(t\right)=\arg\left(8e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)=\arg\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

D'où : $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\overrightarrow{\text{OB}}\right)=\arg\left(jt\right)-\arg\left(t\right)=\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(2\pi\right)=\frac{4\pi}{6}\left(2\pi\right)=\frac{2\pi}{3}\left(2\pi\right)$.

De façon similaire, on obtient : $\left(\overrightarrow{\text{OB}},\overrightarrow{\text{OC}}\right)=\arg\left(j^2t\right)-\arg\left(jt\right)$.

Or : $\arg\left(j^2t\right)=\arg\left(8e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)=\arg\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)=\frac{5\pi}{6}\left(2\pi\right)$.

D'où : $\left(\overrightarrow{\text{OB}},\overrightarrow{\text{OC}}\right)=\arg\left(j^2t\right)-\arg\left(jt\right)=\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\left(2\pi\right)=\frac{4\pi}{6}\left(2\pi\right)=\frac{2\pi}{3}\left(2\pi\right)$.

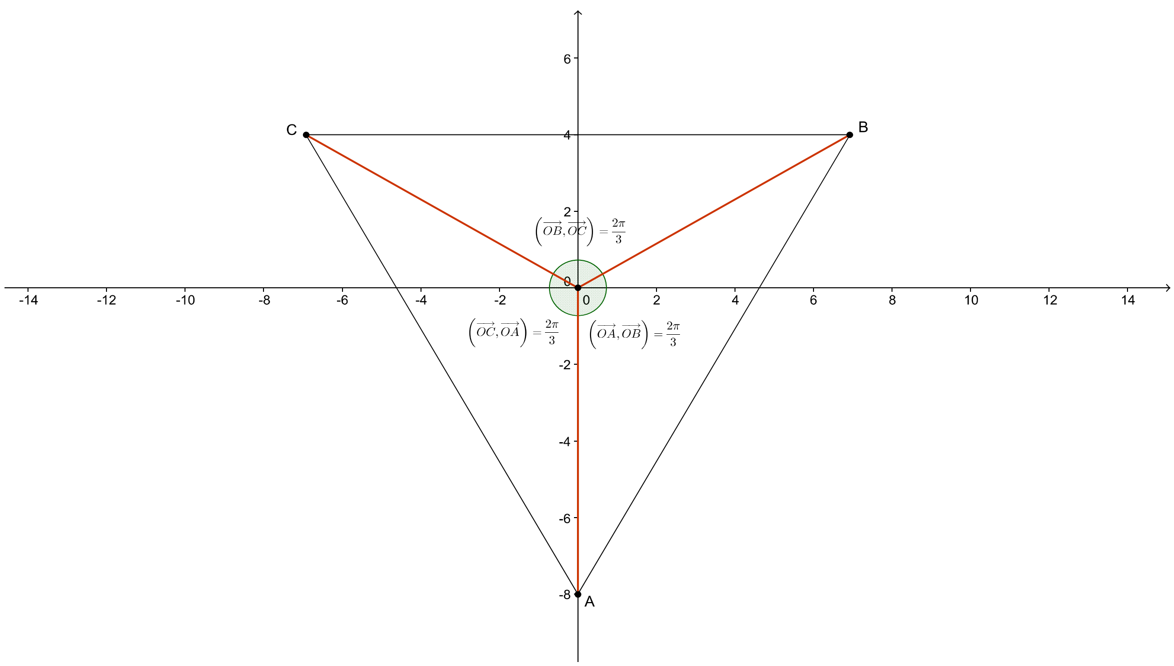
Enfin :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)&=\arg(t)-\arg\left(j^2t\right)\\&=\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)(2\pi)=-\frac{8\pi}{6}(2\pi)=-\frac{4\pi}{3}(2\pi)=\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}\right)(2\pi)\\&=\frac{2\pi}{3}(2\pi)\end{aligned}$$

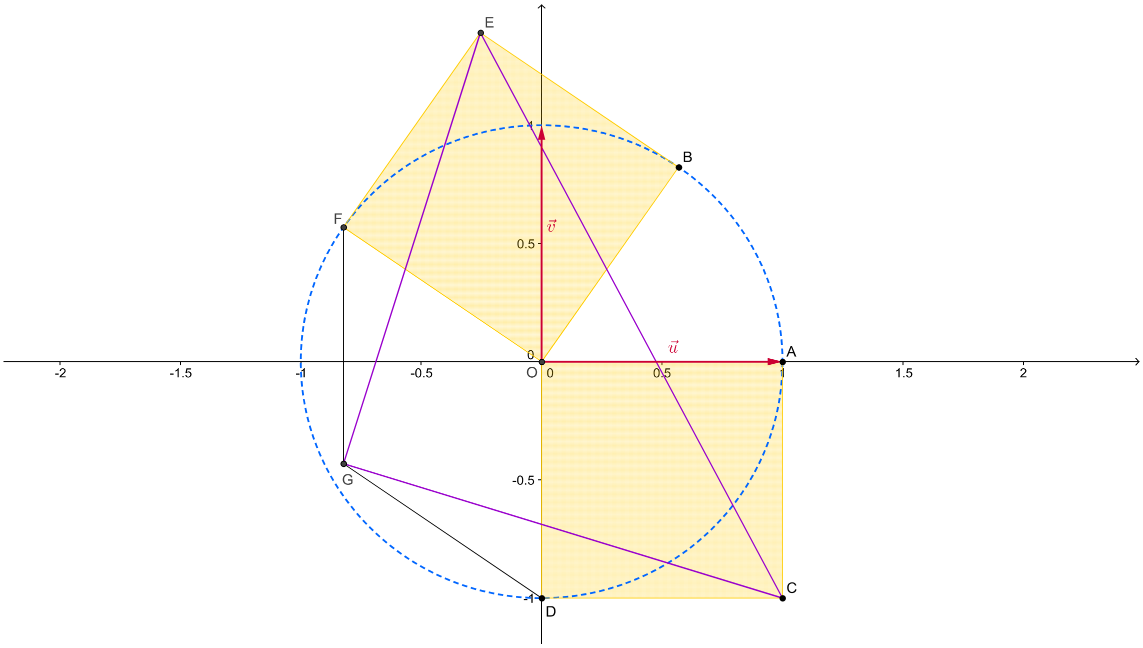
Finalement : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

Comme A, b et C appartiennent à un même cercle de centre O et que l'on a : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{2\pi}{3}(2\pi)$, on en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

$\boxed{\text{Le triangle ABC est équilatéral.}}$



N°90 page 251



1. On veut que ODCA soit un carré direct.
   Puisqu'il s'agit d'un carré de côté de longueur 1 (on a $z_A = 1$), on doit donc avoir, en particulier : $OD = 1$. Soit $|z_D| = 1$.

   On doit également avoir $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$. C'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OD}, \vec{u}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

   Soit enfin : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OD}\right) = \arg(d) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

   On tire de ce qui précède :

$$\begin{aligned} d &= |d| \times \left(\cos(\arg(d)) + i\sin(\arg(d))\right) \\ &= 1 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -i \end{aligned}$$

   Pour déterminer l'affixe du point C, on peut alors utiliser le fait que les segments $[AD]$ et $[OC]$ ont même milieu.

   On a donc : $\frac{a+d}{2} = \frac{c+o}{2}$, soit : $\frac{1-i}{2} = \frac{c+0}{2}$ et enfin : $c = 1 - i$.

$$\boxed{d = -i \text{ et } c = 1 - i.}$$

2. a. On a : $\arg(f)=\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$.

Comme le carré OBEF est direct, on a : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)=\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$.

Par hypothèse, on a aussi : $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\beta(2\pi)$.

On en déduit : $\arg(f)=\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)=\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)(2\pi)$.

Par ailleurs : $\mathrm{OF}=|f|=\mathrm{OB}=1$.

Finalement :

$$\begin{aligned}f&=|f|\times\left(\cos\left(\arg(f)\right)+i\sin\left(\arg(f)\right)\right)\\&=1\times\left(\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$\boxed{f=e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}}$$

b. On a immédiatement : $f=e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\times e^{i\beta}=i\times e^{i\beta}=ib$.

$$\boxed{f=ib}$$

c. De façon similaire à ce que nous avons fait à la question 1, nous utilisons le fait que les segments $[\mathrm{FB}]$ et $[\mathrm{OE}]$ ont le même milieu.

On en tire : $\dfrac{f+b}{2}=\dfrac{\varepsilon+o}{2}$, c'est-à-dire : $\varepsilon=f+b=ib+b=(1+i)b=(1+i)e^{i\beta}$.

On peut « améliorer » cette écriture comme suit :

$$\varepsilon=(1+i)e^{i\beta}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\beta}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\beta}=\sqrt{2}e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boxed{\varepsilon=(1+i)b=(1+i)e^{i\beta}=\sqrt{2}e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}&\text{OFGD parallélogramme}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OF}}=\overrightarrow{\text{DG}} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\text{OF}}}=z_{\overrightarrow{\text{DG}}}\\ &\Leftrightarrow f-o=g-d \Leftrightarrow g=f+d\\ &\Leftrightarrow g=ib+(-i)=i(b-1)\end{aligned}$$

$$\boxed{g=i(b-1)}$$

4. a. Comme $b=e^{i\beta}$, il vient immédiatement :

$$\boxed{b=\cos\beta+i\sin\beta}$$

b. On a : $z_{\overrightarrow{\text{GE}}}=\varepsilon-g=(1+i)b-i(b-1)=b+ib-ib+i=b+i=\cos\beta+i(1+\sin\beta)$. Puis :

$z_{\overrightarrow{\text{GC}}}=c-g=1-i-i(b-1)=1-i-ib+i=1-ib=1-i(\cos\beta+i\sin\beta)=(1+\sin\beta)-i\cos\beta$

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{GE}}\left|\begin{array}{l}\cos\beta\\ 1+\sin\beta\end{array}\right. \text{ et } \overrightarrow{\text{GC}}\left|\begin{array}{l}1+\sin\beta\\ -\cos\beta\end{array}\right.}$$

c. D'après le résultat de la question précédente, il vient immédiatement, le repère considéré étant orthonormal :

$$\overrightarrow{\text{GE}}.\overrightarrow{\text{GC}}=\cos\beta\times(1+\sin\beta)+(1+\sin\beta)\times(-\cos\beta)=0$$

On en déduit alors que le triangle GCE est rectangle en G.

Par ailleurs :

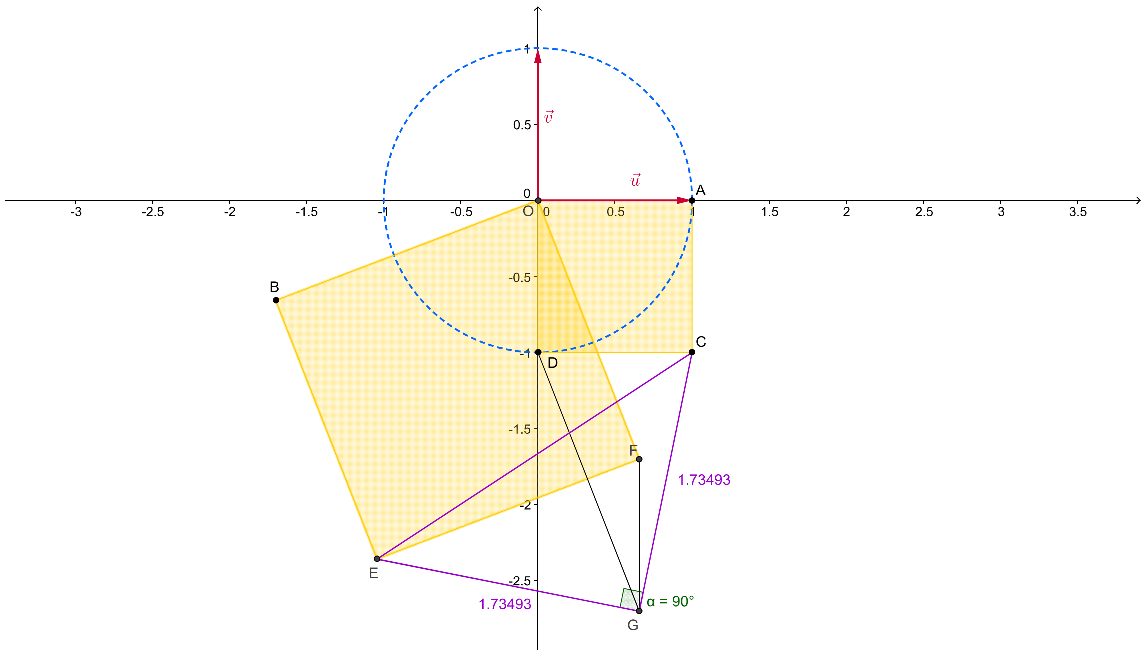
$$\text{GE}=\left\|\overrightarrow{\text{GE}}\right\|=\sqrt{\cos^2\beta+(1+\sin\beta)^2}=\sqrt{\cos^2\beta+1+2\sin\beta+\sin^2\beta}=\sqrt{2(1+\sin\beta)}$$
$$\text{GC}=\left\|\overrightarrow{\text{GC}}\right\|=\sqrt{(1+\sin\beta)^2+(-\cos\beta)^2}=\sqrt{1+2\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\beta}=\sqrt{2(1+\sin\beta)}$$

On a donc $\text{GE}=\text{GC}$ et on en déduit immédiatement que le triangle GEC est isocèle en G.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le triangle GEC est rectangle et isocèle en G.}}$$

5. C'est dans ce genre de situation qu'un logiciel de géométrie dynamique (au hasard… Geogebra ? ☺) permet de se faire une idée du résultat !



En « libérant » le point B (i.e. en ne lui imposant plus d'appartenir au cercle trigonométrique) et en le déplaçant dans le plan, on peut conjecturer (ce n'est qu'une conjecture…) que l'angle $\widehat{\text{CGE}}$ reste droit et que les longueurs GC et GE restent égales. Prouvons ce résultat.

On pose cette fois : $b = |b| e^{i\beta}$ avec $b \neq 0$.
Les raisonnements sur les arguments restent valables et il convient « seulement » de prendre en compte le fait que le module de *b* est quelconque (non nul).

Ainsi, pour *f* on obtient : $f = |b| e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}$ et, pour ε :

$$\varepsilon = (1+i)b = (1+i)|b|e^{i\beta} = \sqrt{2}|b|e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Enfin, on a encore : $g = f + d = i(b-1)$.

Avec $b = |b|e^{i\beta} = |b| \times (\cos\beta + i\sin\beta)$, il vient cette fois :

$$z_{\overline{\text{GE}}} = b + i = |b| \times (\cos\beta + i\sin\beta) + \text{i} = |b|\cos\beta + i(1 + |b|\sin\beta)$$
$$z_{\overline{\text{GC}}} = 1 - ib = 1 - i|b| \times (\cos\beta + i\sin\beta) = (1 + |b|\sin\beta) - i|b|\cos\beta$$

D'où :

$$\overrightarrow{\mathrm{GE}}\left|\begin{array}{l}|b|\cos\beta\\ 1+|b|\sin\beta\end{array}\right. \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{GC}}\left|\begin{array}{l}1+|b|\sin\beta\\ -|b|\cos\beta\end{array}\right.$$

On retrouve immédiatement : $\overrightarrow{\mathrm{GE}}.\overrightarrow{\mathrm{GC}}=0$ et il vient ensuite :

$$\begin{aligned}\mathrm{GE}=\left\|\overrightarrow{\mathrm{GE}}\right\|&=\sqrt{|b|^2\cos^2\beta+\left(1+|b|\sin\beta\right)^2}=\sqrt{|b|^2\cos^2\beta+1+2|b|\sin\beta+|b|^2\sin^2\beta}\\&=\sqrt{1+|b|^2+2|b|\sin\beta}\\ \mathrm{GC}=\left\|\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right\|&=\sqrt{\left(1+|b|\sin\beta\right)^2+\left(-|b|\cos\beta\right)^2}=\sqrt{1+2|b|\sin\beta+|b|^2\sin^2\beta+|b|^2\cos^2\beta}\\&=\sqrt{1+|b|^2+2|b|\sin\beta}\end{aligned}$$

On a encore : $\mathrm{GE}=\mathrm{GC}$.

Finalement :

Pour tout complexe b non nul, affixe du point B, le triangle GEC est rectangle et isocèle en G.