
Les nombres complexes.

Corrigés d'exercices

Version du 08/03/2015

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 244 : N°68

Page 255 : N°104

Page 247 : N°79

Page 248 : N°81

Page 251 : N°90

Page 254 : N°99, 102, 103

N°68 page 244

1. Réponse b

$$\text{On a : } \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right).$$

2. Réponse a

On a :

$$-2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) \right] = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

3. Réponse a

$$\text{On a : } |-3e^{i\theta}| = |-3| \times |e^{i\theta}| = 3 \times 1 = 3.$$

4. Réponse c

$$\text{On a : } \bar{z} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \overline{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2 \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

N°79 page 247

1. Soit iy , $y \in \mathbb{R}$, un imaginaire pur.

iy est solution de (E) si, et seulement si : $(iy)^3 + (-8+i)(iy)^2 + (17-8i)iy + 17i = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} & (iy)^3 + (-8+i)(iy)^2 + (17-8i)iy + 17i = 0 \\ \Leftrightarrow & -iy^3 + (-8+i)(-y^2) + 17iy + 8y + 17i = 0 \\ \Leftrightarrow & -iy^3 + 8y^2 - iy^2 + 17iy + 8y + 17i = 0 \\ \Leftrightarrow & 8y^2 + 8y + i(-y^3 - y^2 + 17y + 17) = 0 \\ \Leftrightarrow & 8y(y+1) + i(-y^2(y+1) + 17(y+1)) = 0 \\ \Leftrightarrow & 8y(y+1) + i(y+1)(-y^2 + 17) = 0 \\ \Leftrightarrow & (y+1) \times [8y + i(-y^2 + 17)] = 0 \\ \Leftrightarrow & y+1 = 0 \text{ ou } 8y + i(-y^2 + 17) \\ \Leftrightarrow & y = -1 \text{ ou } \begin{cases} 8y = 0 \\ -y^2 + 17 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & y = -1 \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ 17 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & y = -1 \end{aligned}$$

L'équation (E) admet donc pour solution l'imaginaire pur $-i$.

2. Le fait que $-i$ soit solution de l'équation (E) permet de factoriser

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$ par $z - (-i) = z + i$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, & z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 + az + b) \\ \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, & z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = z^3 + (a+i)z^2 + (ai+b)z + ib \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -8+i = a+i \\ 17-8i = ai+b \\ 17i = ib \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = -8 \\ b = 17 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

3. En utilisant la factorisation obtenue à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) &= 0 \\ \Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z^2 - 8z + 17 &= 0\end{aligned}$$

Réolvons alors l'équation $z^2 - 8z + 17 = 0$.

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.

Le discriminant vaut : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 17 = 64 - 68 = -4 < 0$.

Les racines complexes conjuguées s'écrivent alors :

$$z_1 = \frac{-(-8) - i\sqrt{-4}}{2 \times 1} = \frac{8-2i}{2} = 4-i \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = 4+i$$

Finalemnt :

L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \{-i; 4-i; 4+i\}$$

N°81 page 248

1. On a : $(1+i)^6 = \left((1+i)^2\right)^3 = (1+2i-1)^3 = (2i)^3 = 2^3 \times i^3 = 8 \times (-i) = -8i$.

$$(1+i)^6 = -8i$$

2. a. $(1+i)^6 = -8i \Leftrightarrow \left((1+i)^3\right)^2 = -8i$.

On en déduit que $(1+i)^3 = (1+i) \times (1+i)^2 = 2i \times (1+i) = 2 \times (-1+i)$ est solution de l'équation (E).

$$2 \times (-1+i) \text{ est solution de l'équation (E).}$$

b. $2 \times (-1+i) = -2+2i$ est solution de l'équation (E). Comme deux nombres opposés admettent le même carré, on en déduit que $-(-2+2i) = 2-2i$ est aussi une solution de l'équation (E).

On en déduit, en admettant que l'équation (E) possède deux solutions :

Les solutions de l'équation (E) sont $-2 + 2i$ et $2 - 2i$.

3. a. $(1+i)^6 = -8i \Leftrightarrow \left((1+i)^2\right)^3 = -8i$.

On en déduit que $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ est solution de l'équation (E').

$t = 2i$ est solution de l'équation (E')

b. On a : $(jt)^3 = j^3 t^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 \times (-8i) = -8i \times e^{i\frac{2\pi}{3} \times 3} = -8i \times e^{2i\pi} = -8i$.

On en déduit ainsi que jt est aussi une solution de l'équation (E').

On a aussi : $(j^2 t)^3 = j^6 t^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^6 \times (-8i) = -8i \times e^{i\frac{2\pi}{3} \times 6} = -8i \times e^{4i\pi} = -8i$.

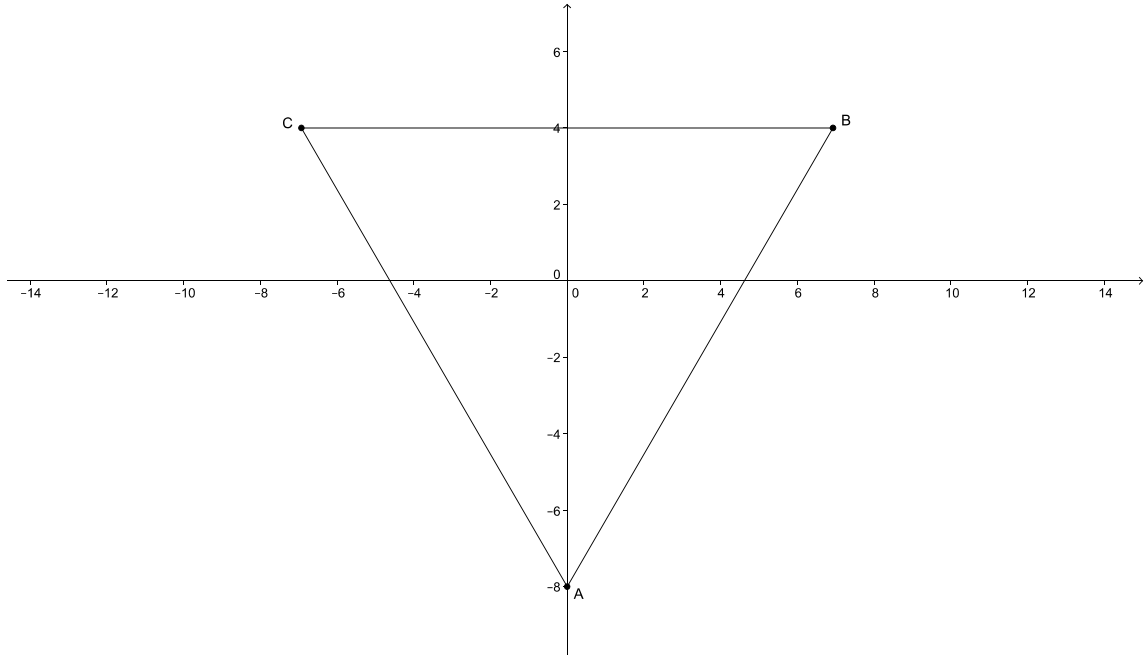
On en déduit également que le complexe $j^2 t$ est solution de l'équation (E').

Les complexes jt et $j^2 t$ sont solutions de l'équation (E').

4. a. On a d'abord : $t = -8i = 8 \times (-i) = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$ puis : $jt = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$ et
enfin : $j^2 t = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$t = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $jt = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $j^2 t = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}$

On obtient alors facilement dans le plan complexe les points A, B et C (cf. la figure page suivante).



b. Notons d'abord que l'on a : $|t| = \left| 8e^{-i\frac{\pi}{2}} \right| = 8$, $|jt| = \left| 8e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 8$ et $|j^2t| = \left| 8e^{i\frac{5\pi}{6}} \right| = 8$.

Les points A, B et C appartiennent donc à un même cercle de centre O et de rayon 8 (ATTENTION ! Ceci ne prouve en rien que le triangle ABC soit équilatéral !).

On a classiquement :

$$\begin{aligned} (\overline{OA}, \overline{OB}) &= (\overline{OA}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overline{OB}) = (\vec{u}, \overline{OB}) - (\vec{u}, \overline{OA}) \\ &= \arg(z_{\overline{OB}}) - \arg(z_{\overline{OA}}) = \arg(z_B) - \arg(z_A) \\ &= \arg(jt) - \arg(t) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \arg(jt) = \arg\left(8e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{6}(2\pi) \text{ et } \arg(t) = \arg\left(8e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{D'où : } (\overline{OA}, \overline{OB}) = \arg(jt) - \arg(t) = \left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)(2\pi) = \frac{4\pi}{6}(2\pi) = \frac{2\pi}{3}(2\pi).$$

De façon similaire, on obtient : $(\overline{OB}, \overline{OC}) = \arg(j^2t) - \arg(jt)$.

$$\text{Or : } \arg(j^2t) = \arg\left(8e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = \arg\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = \frac{5\pi}{6}(2\pi).$$

$$\text{D'où : } (\overline{OB}, \overline{OC}) = \arg(j^2t) - \arg(jt) = \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)(2\pi) = \frac{4\pi}{6}(2\pi) = \frac{2\pi}{3}(2\pi).$$

Enfin :

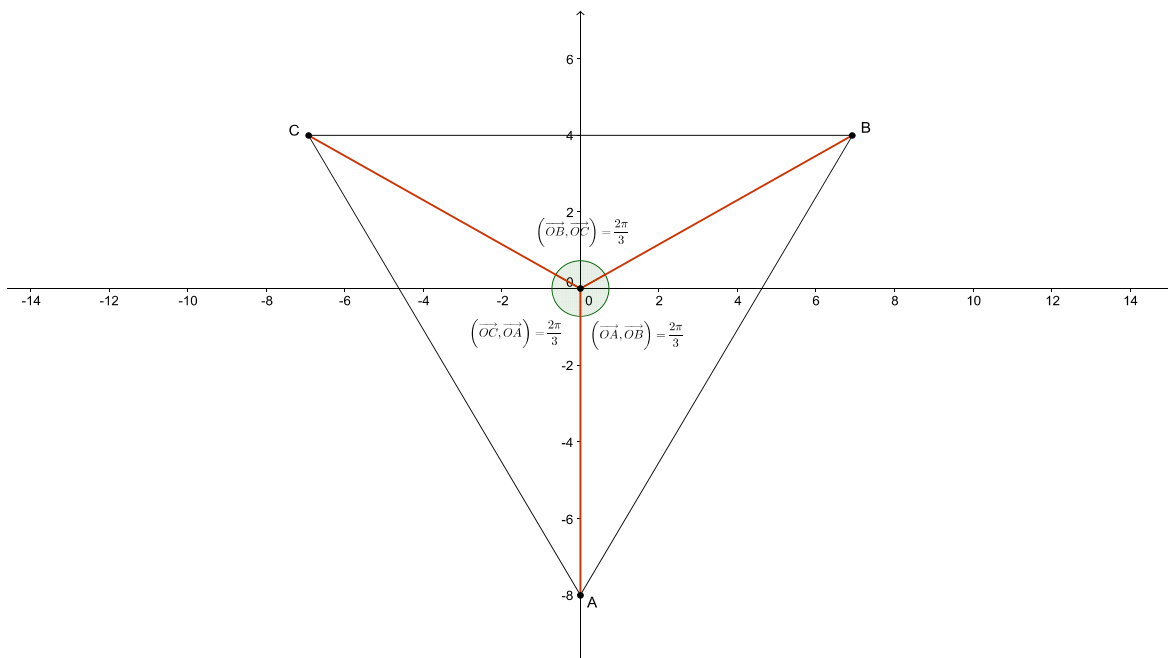
$$\begin{aligned}(\overline{OC}, \overline{OA}) &= \arg(t) - \arg(j^2 t) \\ &= \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)(2\pi) = -\frac{8\pi}{6}(2\pi) = -\frac{4\pi}{3}(2\pi) = \left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right)(2\pi) \\ &= \frac{2\pi}{3}(2\pi)\end{aligned}$$

Enfinement : $(\overline{OA}, \overline{OB}) = (\overline{OB}, \overline{OC}) = (\overline{OC}, \overline{OA}) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

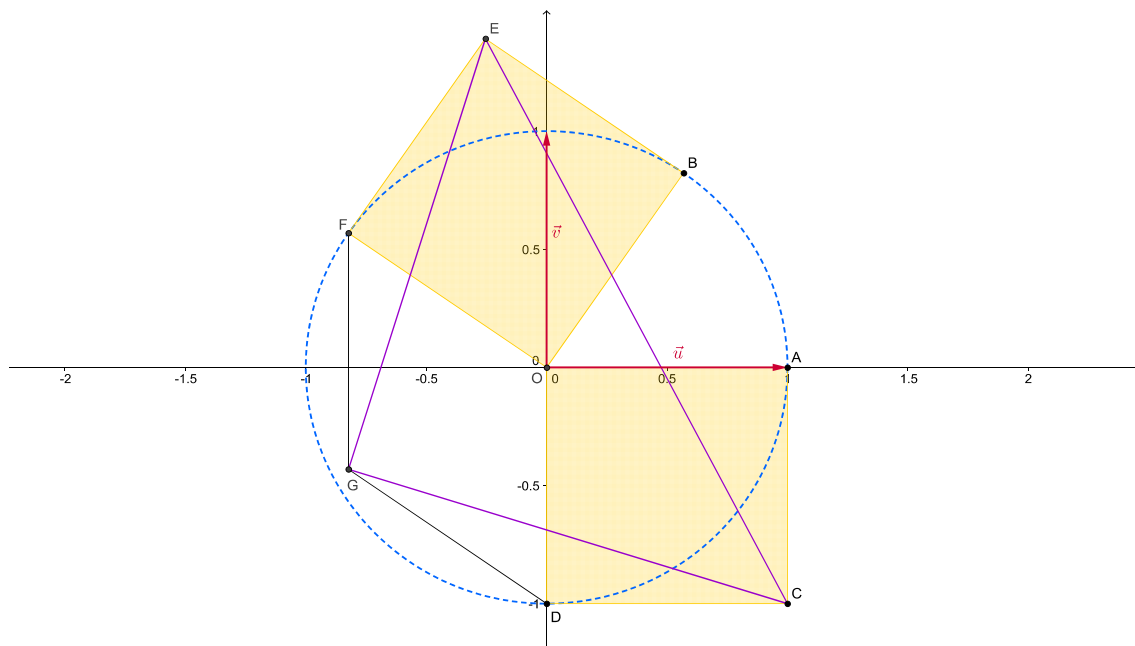
Comme A, b et C appartiennent à un même cercle de centre O et que l'on a :

$(\overline{OA}, \overline{OB}) = (\overline{OB}, \overline{OC}) = (\overline{OC}, \overline{OA}) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$, on en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

Le triangle ABC est équilatéral.



N°90 page 251



1. On veut que ODCA soit un carré direct.
Puisqu'il s'agit d'un carré de côté de longueur 1 (on a $z_A = 1$), on doit donc avoir, en particulier : $OD = 1$. Soit $|z_D| = 1$.

On doit également avoir $(\overline{OD}, \overline{OA}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$. C'est-à-dire : $(\overline{OD}, \vec{u}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Soit enfin : $(\vec{u}, \overline{OD}) = \arg(d) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$.

On tire de ce qui précède :

$$\begin{aligned} d &= |d| \times (\cos(\arg(d)) + i \sin(\arg(d))) \\ &= 1 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= -i \end{aligned}$$

Pour déterminer l'affixe du point C, on peut alors utiliser le fait que les segments [AD] et [OC] ont même milieu.

On a donc : $\frac{a+d}{2} = \frac{c+o}{2}$, soit : $\frac{1-i}{2} = \frac{c+0}{2}$ et enfin : $c = 1-i$.

$$d = -i \text{ et } c = 1-i.$$

2. a. On a : $\arg(f) = (\vec{u}, \overline{OF}) = (\vec{u}, \overline{OB}) + (\overline{OB}, \overline{OF})$.

Comme le carré OBEF est direct, on a : $(\overline{OB}, \overline{OF}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Par hypothèse, on a aussi : $(\vec{u}, \overline{OB}) = \beta (2\pi)$.

On en déduit : $\arg(f) = (\vec{u}, \overline{OF}) = \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) (2\pi)$.

Par ailleurs : $OF = |f| = OB = 1$.

Finalemment :

$$\begin{aligned} f &= |f| \times (\cos(\arg(f)) + i \sin(\arg(f))) \\ &= 1 \times \left(\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$f = e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

b. On a immédiatement : $f = e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\beta} = i \times e^{i\beta} = ib$.

$$f = ib$$

c. De façon similaire à ce que nous avons fait à la question 1, nous utilisons le fait que les segments [FB] et [OE] ont le même milieu.

On en tire : $\frac{f+b}{2} = \frac{\varepsilon+o}{2}$, c'est-à-dire : $\varepsilon = f+b = ib+b = (1+i)b = (1+i)e^{i\beta}$.

On peut « améliorer » cette écriture comme suit :

$$\varepsilon = (1+i)e^{i\beta} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{i\beta} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\beta} = \sqrt{2} e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\varepsilon = (1+i)b = (1+i)e^{i\beta} = \sqrt{2} e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} & \text{OFGD parallélogramme} \\ & \Leftrightarrow \overline{OF} = \overline{DG} \Leftrightarrow z_{\overline{OF}} = z_{\overline{DG}} \\ & \Leftrightarrow f - o = g - d \Leftrightarrow g = f + d \\ & \Leftrightarrow g = ib + (-i) = i(b-1) \end{aligned}$$

$$g = i(b-1)$$

4. a. Comme $b = e^{i\beta}$, il vient immédiatement :

$$b = \cos \beta + i \sin \beta$$

b. On a : $z_{\overline{GE}} = \varepsilon - g = (1+i)b - i(b-1) = b + ib - ib + i = b + i = \cos \beta + i(1 + \sin \beta)$. Puis :

$$z_{\overline{GC}} = c - g = 1 - i - i(b-1) = 1 - i - ib + i = 1 - ib = 1 - i(\cos \beta + i \sin \beta) = (1 + \sin \beta) - i \cos \beta$$

On a donc :

$$\overline{GE} \begin{vmatrix} \cos \beta \\ 1 + \sin \beta \end{vmatrix} \text{ et } \overline{GC} \begin{vmatrix} 1 + \sin \beta \\ -\cos \beta \end{vmatrix}$$

c. D'après le résultat de la question précédente, il vient immédiatement, le repère considéré étant orthonormal :

$$\overline{GE} \cdot \overline{GC} = \cos \beta \times (1 + \sin \beta) + (1 + \sin \beta) \times (-\cos \beta) = 0$$

On en déduit alors que le triangle GCE est rectangle en G.

Par ailleurs :

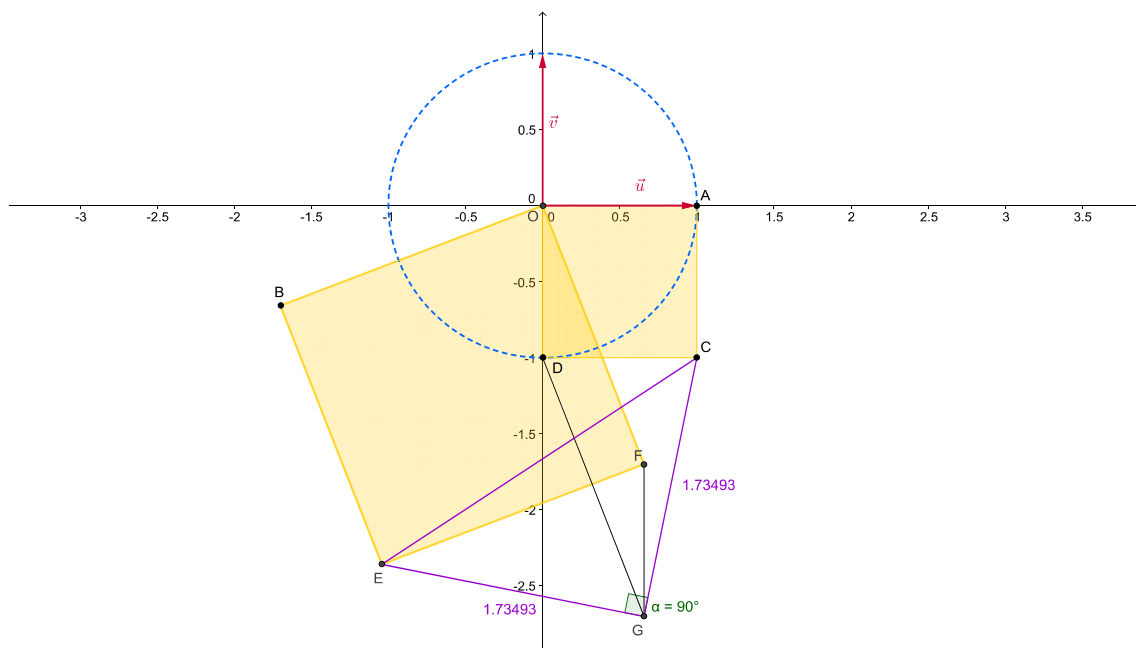
$$\begin{aligned} GE &= \|\overline{GE}\| = \sqrt{\cos^2 \beta + (1 + \sin \beta)^2} = \sqrt{\cos^2 \beta + 1 + 2 \sin \beta + \sin^2 \beta} = \sqrt{2(1 + \sin \beta)} \\ GC &= \|\overline{GC}\| = \sqrt{(1 + \sin \beta)^2 + (-\cos \beta)^2} = \sqrt{1 + 2 \sin \beta + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta} = \sqrt{2(1 + \sin \beta)} \end{aligned}$$

On a donc $GE = GC$ et on en déduit immédiatement que le triangle GEC est isocèle en G.

Finalement :

Le triangle GEC est rectangle et isocèle en G.

5. C'est dans ce genre de situation qu'un logiciel de géométrie dynamique (au hasard... Geogebra ? ☺) permet de se faire une idée du résultat !



En « libérant » le point B (i.e. en ne lui imposant plus d'appartenir au cercle trigonométrique) et en le déplaçant dans le plan, on peut conjecturer (ce n'est qu'une conjecture...) que l'angle \widehat{CGE} reste droit et que les longueurs GC et GE restent égales. Prouvons ce résultat.

On pose cette fois : $b = |b|e^{i\beta}$ avec $b \neq 0$.

Les raisonnements sur les arguments restent valables et il convient « seulement » de prendre en compte le fait que le module de b est quelconque (non nul).

Ainsi, pour f on obtient : $f = |b|e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}$ et, pour ε :

$$\varepsilon = (1+i)b = (1+i)|b|e^{i\beta} = \sqrt{2}|b|e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Enfin, on a encore : $g = f + d = i(b-1)$.

Avec $b = |b|e^{i\beta} = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$, il vient cette fois :

$$\begin{aligned} z_{\overline{GE}} &= b + i = |b|(\cos \beta + i \sin \beta) + i = |b|\cos \beta + i(1 + |b|\sin \beta) \\ z_{\overline{GC}} &= 1 - ib = 1 - i|b|(\cos \beta + i \sin \beta) = (1 + |b|\sin \beta) - i|b|\cos \beta \end{aligned}$$

D'où :

$$\overline{\text{GE}} \begin{vmatrix} |b| \cos \beta \\ 1 + |b| \sin \beta \end{vmatrix} \text{ et } \overline{\text{GC}} \begin{vmatrix} 1 + |b| \sin \beta \\ -|b| \cos \beta \end{vmatrix}$$

On retrouve immédiatement : $\overline{\text{GE}} \cdot \overline{\text{GC}} = 0$ et il vient ensuite :

$$\begin{aligned} \text{GE} = \|\overline{\text{GE}}\| &= \sqrt{|b|^2 \cos^2 \beta + (1 + |b| \sin \beta)^2} = \sqrt{|b|^2 \cos^2 \beta + 1 + 2|b| \sin \beta + |b|^2 \sin^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 + |b|^2 + 2|b| \sin \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{GC} = \|\overline{\text{GC}}\| &= \sqrt{(1 + |b| \sin \beta)^2 + (-|b| \cos \beta)^2} = \sqrt{1 + 2|b| \sin \beta + |b|^2 \sin^2 \beta + |b|^2 \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 + |b|^2 + 2|b| \sin \beta} \end{aligned}$$

On a encore : $\text{GE} = \text{GC}$ et, finalement :

Pour tout complexe b non nul, affixe du point B,
le triangle GEC est rectangle et isocèle en G.

N°99 page 254

a. $z_1 = (3+i)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times i + i^2 = 9 + 6i - 1 = \boxed{8+6i}$

b. En tenant compte du résultat précédent :

$$\begin{aligned} z_2 &= (2-3i) \times \bar{z}_1 = (2-3i) \times (8-6i) = 2 \times 8 + 2 \times (-6i) - 3i \times 8 - 3i \times (-6i) \\ &= 16 - 12i - 24i - 18 = \boxed{-2-36i} \end{aligned}$$

c. En tenant compte des deux résultats ci-dessus :

$$z_3 = iz_2 - z_1 = i(-2-36i) - (8+6i) = -2i + 36 - 8 - 6i = \boxed{28-8i}$$

d. $z_4 = \frac{13+2i}{5-i} = \frac{(13+2i) \times (5+i)}{(5-i) \times (5+i)} = \frac{13 \times 5 + 13 \times i + 2i \times 5 + 2i \times i}{5^2 + 1^2} = \frac{65 + 13i + 10i - 2}{26} = \boxed{\frac{63+23i}{26}}$

N°102 page 254

1. Pour éviter toute confusion, nous notons z_I, z_J, z_K et z_L les affixes respectives des points I, J, K et L .

On a alors immédiatement : $z_I = \frac{a+b}{2}, z_J = \frac{b+c}{2}, z_K = \frac{c+d}{2}$ et $z_L = \frac{a+d}{2}$.

$$z_I = \frac{a+b}{2}, z_J = \frac{b+c}{2}, z_K = \frac{c+d}{2} \text{ et } z_L = \frac{a+d}{2}$$

2. a. On a $z_{\overline{IJ}} = z_J - z_I = \frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{c-a}{2}$ et $z_{\overline{LK}} = z_K - z_L = \frac{c+d}{2} - \frac{a+d}{2} = \frac{c-a}{2}$.

Comme $z_{\overline{IJ}} = z_{\overline{LK}}$, on en déduit que les vecteurs \overline{IJ} et \overline{LK} sont égaux puis, en définitive, que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Le milieu du segment $[IK]$ admet pour affixe : $\frac{z_I + z_K}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$ et

le milieu du segment $[JL]$ admet pour affixe : $\frac{z_J + z_L}{2} = \frac{\frac{b+c}{2} + \frac{a+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$.

Les milieux des segments $[IK]$ et $[JL]$ admettant la même affixe, ils sont confondus.

Comme les segments $[IK]$ et $[JL]$ admettent le même milieu, on en conclut immédiatement, comme précédemment, que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

N°103 page 254

1. On a : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{12} - i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right)} = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{a + ib}{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(a + ib) \times \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times (a + ib) \times (1 - i\sqrt{3})}{1} = \frac{(a + b\sqrt{3}) + i(b - a\sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+b\sqrt{3})+i(b-a\sqrt{3})}{2}$$

3. En combinant les résultats des questions 1 et 2, on a :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+b\sqrt{3})+i(b-a\sqrt{3})}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{(a+b\sqrt{3})+i(b-a\sqrt{3})}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow (a+b\sqrt{3})+i(b-a\sqrt{3}) &= 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \Leftrightarrow (a+b\sqrt{3})+i(b-a\sqrt{3}) &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+\sqrt{3}b = \sqrt{2} \\ -\sqrt{3}a+b = -\sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a+3b = \sqrt{6} \\ -\sqrt{3}a+b = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ a = \sqrt{2} - \sqrt{3}b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ a = \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ a = \frac{1}{4}(4\sqrt{2} - \sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ a = \frac{1}{4}(4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ b = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

N°104 page 255

1. $z = x + iy$ avec $|z|=1$.

On a : $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

On pose : $X = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$.

Comme $|z| = 1$, on a : $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1^2 = 1$.

On a donc le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

En sommant les lignes membre à membre, on obtient : $2x^2 = 1 + X$, soit : $x^2 = \frac{1+X}{2}$.

En soustrayant la première ligne à la seconde, on obtient : $2y^2 = 1 - X$, soit : $y^2 = \frac{1-X}{2}$.

$$x^2 = \frac{1+X}{2} \text{ et } y^2 = \frac{1-X}{2}$$

2. On pose $z = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$.

Il vient : $z^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2i \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a donc : $X = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'après la question précédente, il vient alors : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+X}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$.

Comme on a $0 \leq \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, il vient $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$.

On a aussi : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-X}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ et comme $0 \leq \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, il vient

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et, finalement : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$