Continuité et théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigés d'exercices

Version du 03/11/2013

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 76 : N°**79**, **81**
Page 77 : N°**88**, **89**, **92**

N°79 page 76

a. Sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^* = \left]-\infty\,;0\right[$, la fonction *f* est polynômiale et il vient immédiatement :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(x^2-1\right) = 0^2-1 = -1$$

Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+ = \left[0\,;+\infty\right[$, la fonction *f* est également polynômiale et on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x-1\right) = 0-1 = -1 = f(0)$$

Ainsi, on a : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$ et on en déduit finalement :

La fonction *f* est continue en 0.

b. On procède de façon analogue à ce qui a été fait à la question précédente.

Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;1\right[$, la fonction *f* est polynômiale et il vient immédiatement :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(x^2+1\right) = 1^2+1 = 2$$

Sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$, la fonction *f* correspond, à un facteur multiplicatif près, à la fonction inverse qui est continue sur cet intervalle et on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 = f(1)$$

Ainsi, on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1)$ et on en déduit finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue en 1.}}$$

N°81 page 76

1. Sur les intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$, la fonction *f* est rationnelle et donc continue.
   On doit donc étudier la continuité en -1.

   Pour tout réel *x* différent de -1, on a : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$.
   On a donc immédiatement : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1}(x-1) = -1-1 = -2$.
   On a alors :

   $$\begin{aligned} & f \text{ continue en } -1 \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \\ \Leftrightarrow\ & -2 = m \end{aligned}$$

   Finalement :

   $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, } m = -2.}$$

2. Pour tout *x* réel, on a $x^2+1 \geq 1 > 0$. L'expression $\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$ est obtenue par composition et opérations de fonctions usuelles définies et continues sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. La fonction *f* est ainsi continue sur chacun de ces deux intervalles.
   On doit donc étudier la continuité en 0.

   Comme $\lim\limits_{x \to 0}(x^2+1) = 0^2+1 = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1}\sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$, il vient (composition) :
   $\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{x^2+1} = 1$ puis : $\lim\limits_{x \to 0}\left(1-\sqrt{x^2+1}\right) = 1-1 = 0$.
   Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

Pour lever l'indétermination, on utilise l'expression conjuguée du numérateur. Pour tout réel x non nul, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} &= \frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1^2-\sqrt{x^2+1}^2}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{1-\left(x^2+1\right)}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{-x^2}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

On a immédiatement $\lim_{x\to 0}(-x)=0$ et $\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)=1+1=2$, d'où (rapport) :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}} = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}&f \text{ continue en } 0 \\ \Leftrightarrow\ &\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \\ \Leftrightarrow\ &0 = m\end{aligned}$$

Finalement :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m=0$.

N°88 page 77

1. Grâce au tableau, on obtient (attention à l'ordre des bornes et à l'ouverture ou la fermeture des intervalles) :

$$f\left(]-\infty\,;0[\right) =]1\,;2[\,,\ \ f\left([0\,;2[\right) =]-\infty\,;2]$$
$$f\left(]-\infty\,;2[\right) =]-\infty\,;2] \text{ et } f\left(]2\,;+\infty[\right) =]-\infty\,;1[$$

2. a. D'après la question précédente, on a $f\left(]-\infty\,;0[\right) =]1\,;2[$. Comme $0 \notin]1\,;2[$, l'équation $f(x)=0$ n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
   On a aussi $f\left([0\,;2[\right) =]-\infty\,;2]$ et $0 \in]-\infty\,;2]$.
   Comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;2[$ elle prendra donc, d'après le théorème de la bijection, une fois et une seule toutes les valeurs

de l'intervalle $]-\infty\,;2]$. Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;2[$.

On a enfin $f\left(]2\,;+\infty[\right)=]-\infty\,;1[$ et $0\in]-\infty\,;1[$.
Comme la fonction *f* est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ elle prendra donc, d'après le théorème de la bijection, une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty\,;1[$. Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

N°89 page 77

1. $f(0)=0^5-5\times 0+2=2$ et $f(1)=1^5-5\times 1+2=-2$

$$\boxed{f(0)=2 \text{ et } f(1)=-2}$$

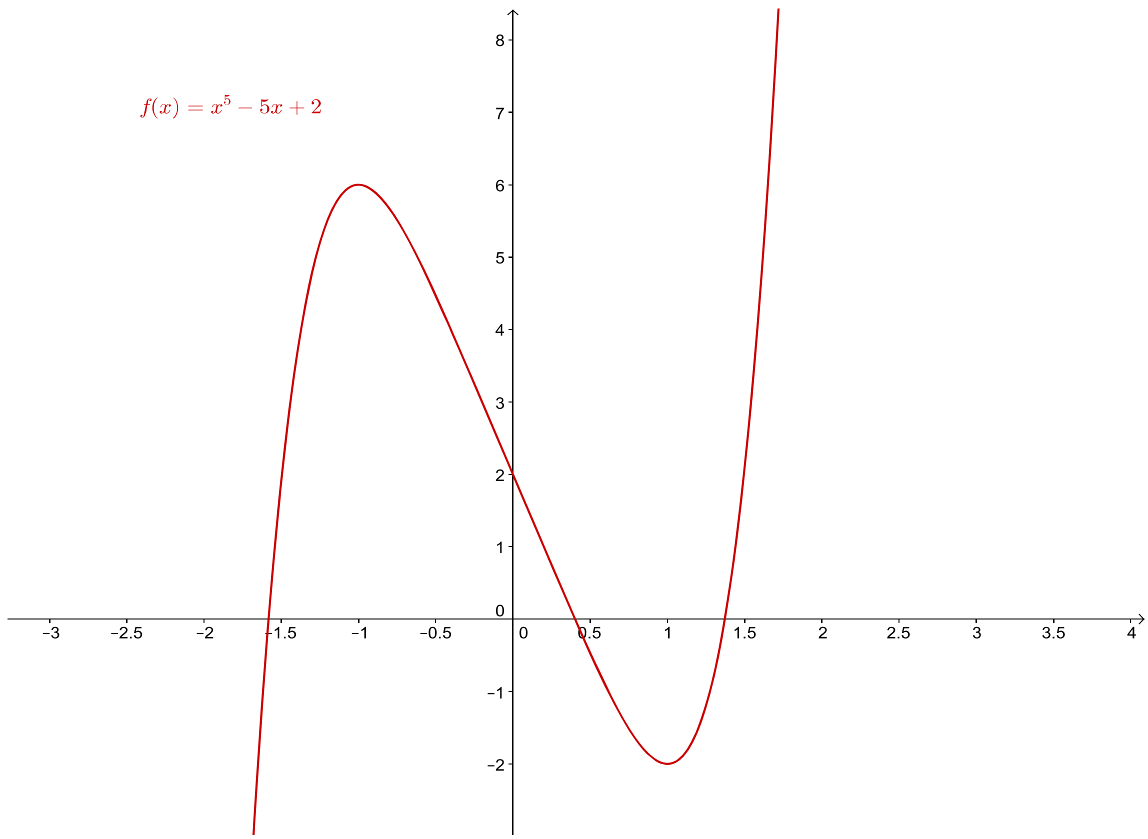
2. La fonction *f* est une fonction polynômiale. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et, à fortiori, sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   Par ailleurs, $f(0)=2$ et $f(1)=-2$.
   Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction *f* va prendre au moins une fois toutes les valeurs de l'intervalle $[-2\,;2]$.

   Comme $0\in[-2\,;2]$, on en déduit finalement que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0\,;1]$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ admet au moins une solution sur l'intervalle } [0\,;1].}$$

Remarque : sur l'intervalle $[0\,;1]$, la fonction *f* est en fait strictement décroissante (calculez la dérivée et étudiez son signe !). Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet en fait une solution unique sur l'intervalle $[0\,;1]$.

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de la fonction *f* (attention, le repère n'est pas orthonormé).



N°92 page 77

Dans un premier temps, nous étudions les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

En tant que fonction polynôme, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on a :

$$g'(x) = 4x^3 - 4\times 3x^2 + 4\times 2x = 4x\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

La somme des coefficients du trinôme $x^2 - 3x + 2$ étant nulle, 1 en est racine et on a facilement : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Finalement : $g'(x) = 4x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 4x(x-1)(x-2)$ et il vient facilement :

- Si $x \in \mathbb{R}_-^* =]-\infty\,;0[$, $g'(x) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.
- $g'(0) = 0$.
- Si $x \in]0\,;1[$, $g'(x) > 0$ et la fonction g est strictement croissante.
- $g'(1) = 0$.
- Si $x \in]1\,;2[$, $g'(x) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.

- $g'(2)=0$.
- Si $x\in\left]2\,;+\infty\right[$, $g'(x)>0$ et la fonction *g* est strictement croissante.

Ainsi, la fonction *g* est :

- Strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$.
- Strictement croissante sur $\left[0\,;1\right]$.
- Strictement décroissante sur $\left[1\,;2\right]$.
- Strictement croissante sur $\left[2\,;+\infty\right[$.

Notons que la fonction *g* est une fonction polynômiale. Elle est donc continue sur chacun des quatre intervalles ci-dessus.

→ Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$, la fonction *g* est continue et strictement décroissante.

Pour tout réel *x* non nul, on a : $g(x)=x^4\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=0$, il vient immédiatement (somme) :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=1+0+0+0=1$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$, il vient (produit) : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^4\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)\right]=+\infty$.

On a par ailleurs : $g(0)=0^4-4\times0^3+4\times0^2-1=-1$.

Comme $0\in\left[-1\,;+\infty\right[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$.

→ Sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, la fonction *g* est continue et strictement croissante.

On a $g(0)=-1$ et $g(1)=1^4-4\times1^3+4\times1^2-1=1-4+4-1=0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), la fonction *g* prend une fois et une seule, lorsque *x* varie dans l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, toutes les valeurs de l'intervalle $\left[-1\,;0\right]$. L'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ et cette solution est, d'après le calcul précédent : $x=1$.

→ Sur l'intervalle $[1\,;2]$, la fonction g est continue et strictement décroissante.

On a $g(1)=0$ et comme g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;2]$, il vient immédiatement : $\forall x\in]1\,;2],\ g(x)<g(1)=0$.

Ainsi, l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]1\,;2]$.

→ Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante.

On a $g(2)=2^4-4\times2^3+4\times2^2-1=16-4\times8+4\times4-1=-1$ et, de façon similaire à ce qui a été fait en $-\infty$, on montre que l'on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Comme $0\in[-1\,;+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

En définitive :

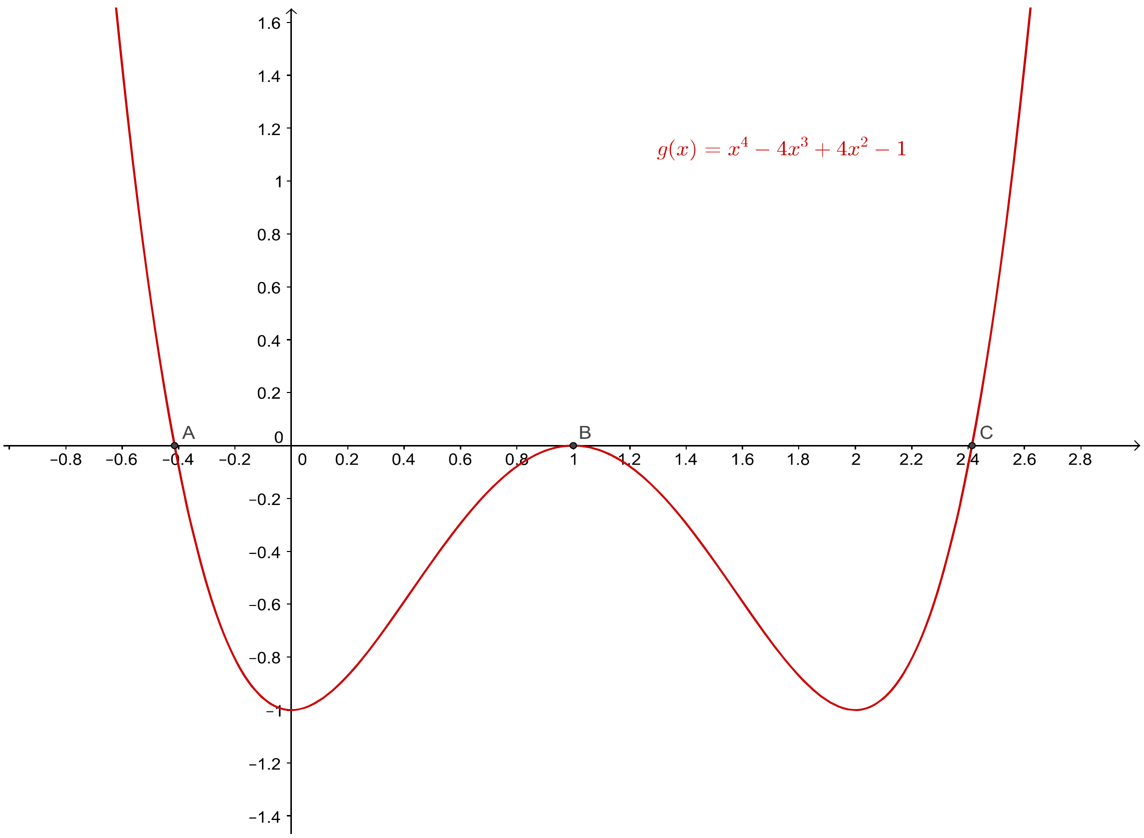
L'équation $g(x)=0$ admet trois solutions : $x=1$, une solution dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et une solution dans l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

Remarque : avec un peu d'entraînement, les trois premiers coefficients nous conduisent à écrire :

$$\begin{aligned}
g(x)&=x^4-4x^3+4x^2-1\\
&=x^2\left(x^2-4x+4\right)-1\\
&=x^2(x-2)^2-1\\
&=\left[x(x-2)\right]^2-1^2\\
&=\left[x(x-2)+1\right]\left[x(x-2)-1\right]\\
&=\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-2x-1\right)\\
&=(x-1)^2\left(x^2-2x-1\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux solutions non entières de l'équation $g(x)=0$ sont les solutions de l'équation $x^2-2x-1=0$ à savoir (vérifiez-le !) : $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de la fonction g.


$g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$
A
B
C
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−1.4
−0.8 −0.6 −0.4 −0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8