
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigés d'exercices

Version du 08/08/2014

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 76 : N°79, 81

Page 77 : N°88, 89, 92

Page 78 : N°96, 98

Page 85 : N°118

Page 87 : N°129

Page 89 : N°141

N°79 page 76

a. Sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^* =]-\infty ; 0[$, la fonction f est polynômiale et il vient immédiatement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$$

Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$, la fonction f est également polynômiale et on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 1) = 0 - 1 = -1 = f(0)$$

Ainsi, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$ et on en déduit finalement :

La fonction f est continue en 0.

b. On procède de façon analogue à ce qui a été fait à la question précédente.

Sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$, la fonction f est polynômiale et il vient immédiatement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$$

Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la fonction f correspond, à un facteur multiplicatif près, à la fonction inverse qui est continue sur cet intervalle et on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 = f(1)$$

Ainsi, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1)$ et on en déduit finalement :

La fonction f est continue en 1.

N°81 page 76

1. Sur les intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$, la fonction f est rationnelle et donc continue. On doit donc étudier la continuité en -1 .

Pour tout réel x différent de -1 , on a : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$.

On a donc immédiatement : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} & f \text{ continue en } -1 \\ \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \\ \Leftrightarrow & -2 = m \end{aligned}$$

Finalelement :

La fonction f est continue sur \mathbb{R} si, et seulement si, $m = -2$.

2. Pour tout x réel, on a $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. L'expression $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ est donc bien définie sur \mathbb{R}^* .

La fonction $x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ est obtenue par composition et opérations de fonctions usuelles définies et continues sur \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_+ . La fonction f est ainsi continue sur chacun de ces deux intervalles.

On doit donc étudier la continuité en 0.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$, il vient (composition) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 1} = 1 \text{ puis : } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{x^2 + 1}) = 1 - 1 = 0.$$

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Pour lever l'indétermination, on utilise l'expression conjuguée du numérateur. Pour tout réel x non nul, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} &= \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1^2-\sqrt{x^2+1}^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{1-(x^2+1)}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = \frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

On a immédiatement $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sqrt{x^2+1}) = 1+1 = 2$, d'où (rapport) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}} = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}f \text{ continue en } 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \\ \Leftrightarrow 0 = m\end{aligned}$$

Finalement :

La fonction f est continue sur \mathbb{R} si, et seulement si, $m = 0$.

N°88 page 77

1. Grâce au tableau, on obtient (attention à l'ordre des bornes et à l'ouverture ou la fermeture des intervalles) :

$$\begin{aligned}f(]-\infty; 0[) &=]1; 2[, \quad f([0; 2[) =]-\infty; 2] \\ f(]-\infty; 2[) &=]-\infty; 2] \quad \text{et} \quad f(]2; +\infty[) =]-\infty; 1[\end{aligned}$$

2. a. D'après la question précédente, on a $f(]-\infty; 0[) =]1; 2[$. Comme $0 \notin]1; 2[$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; 0[$.

On a aussi $f([0; 2[) =]-\infty; 2]$ et $0 \in]-\infty; 2]$.

Comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 2[$ elle prendra donc, d'après le théorème de la bijection, une fois et une seule toutes les valeurs

de l'intervalle $]-\infty; 2]$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 2[$.

On a enfin $f(]2; +\infty[) =]-\infty; 1[$ et $0 \in]-\infty; 1[$.

Comme la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]2; +\infty[$ elle prendra donc, d'après le théorème de la bijection, une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty; 1[$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]2; +\infty[$.

N°89 page 77

1. $f(0) = 0^5 - 5 \times 0 + 2 = 2$ et $f(1) = 1^5 - 5 \times 1 + 2 = -2$

$f(0) = 2$ et $f(1) = -2$

2. La fonction f est une fonction polynomiale. Elle est donc continue sur \mathbb{R} et, à fortiori, sur l'intervalle $[0; 1]$.

Par ailleurs, $f(0) = 2$ et $f(1) = -2$.

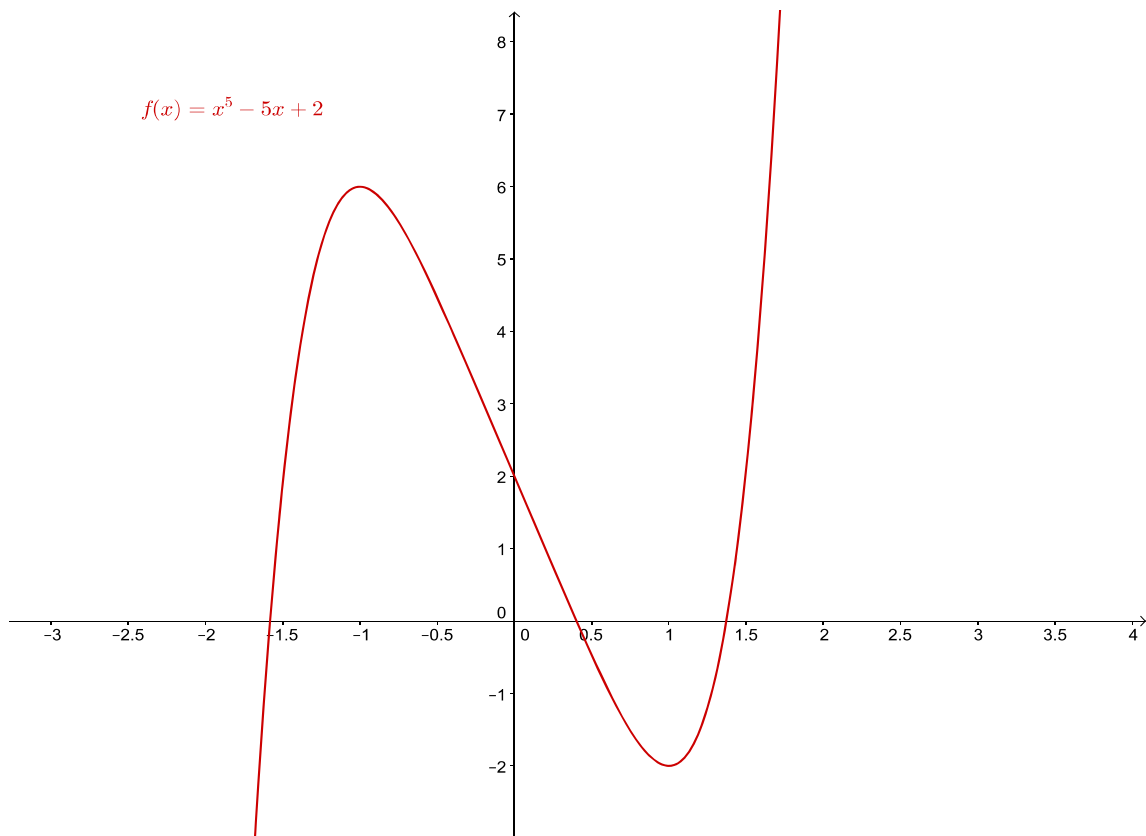
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f va prendre au moins une fois toutes les valeurs de l'intervalle $[-2; 2]$.

Comme $0 \in [-2; 2]$, on en déduit finalement que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

Remarque : sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction f est en fait strictement décroissante (calculez la dérivée et étudiez son signe !). Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet en fait une solution unique sur l'intervalle $[0; 1]$.

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de la fonction f (attention, le repère n'est pas orthonormé).



N°92 page 77

Dans un premier temps, nous étudions les variations de la fonction g sur \mathbb{R} .

En tant que fonction polynôme, la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel, on a :

$$g'(x) = 4x^3 - 4 \times 3x^2 + 4 \times 2x = 4x(x^2 - 3x + 2)$$

La somme des coefficients du trinôme $x^2 - 3x + 2$ étant nulle, 1 en est racine et on a facilement : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Finalement : $g'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$ et il vient facilement :

- Si $x \in \mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$, $g'(x) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.
- $g'(0) = 0$.
- Si $x \in]0; 1[$, $g'(x) > 0$ et la fonction g est strictement croissante.
- $g'(1) = 0$.
- Si $x \in]1; 2[$, $g'(x) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.

- $g'(2) = 0$.
- Si $x \in]2; +\infty[$, $g'(x) > 0$ et la fonction g est strictement croissante.

Ainsi, la fonction g est :

- Strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
- Strictement croissante sur $[0; 1]$.
- Strictement décroissante sur $[1; 2]$.
- Strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

Notons que la fonction g est une fonction polynômiale. Elle est donc continue sur chacun des quatre intervalles ci-dessus.

→ Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$, la fonction g est continue et strictement décroissante.

Pour tout réel x non nul, on a : $g(x) = x^4 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$, il vient immédiatement (somme) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$, il vient (produit) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^4 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \right] = +\infty$.

On a par ailleurs : $g(0) = 0^4 - 4 \times 0^3 + 4 \times 0^2 - 1 = -1$.

Comme $0 \in [-1; +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty; 0]$.

→ Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction g est continue et strictement croissante.

On a $g(0) = -1$ et $g(1) = 1^4 - 4 \times 1^3 + 4 \times 1^2 - 1 = 1 - 4 + 4 - 1 = 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), la fonction g prend une fois et une seule, lorsque x varie dans l'intervalle $[0; 1]$, toutes les valeurs de l'intervalle $[-1; 0]$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$ et cette solution est, d'après le calcul précédent : $x = 1$.

→ Sur l'intervalle $[1; 2]$, la fonction g est continue et strictement décroissante.

On a $g(1) = 0$ et comme g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 2]$, il vient immédiatement : $\forall x \in]1; 2], g(x) < g(1) = 0$.

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]1; 2]$.

→ Sur l'intervalle $[2; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante.

On a $g(2) = 2^4 - 4 \times 2^3 + 4 \times 2^2 - 1 = 16 - 4 \times 8 + 4 \times 4 - 1 = -1$ et, de façon similaire à ce qui a été fait en $-\infty$, on montre que l'on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Comme $0 \in]-1; +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

En définitive :

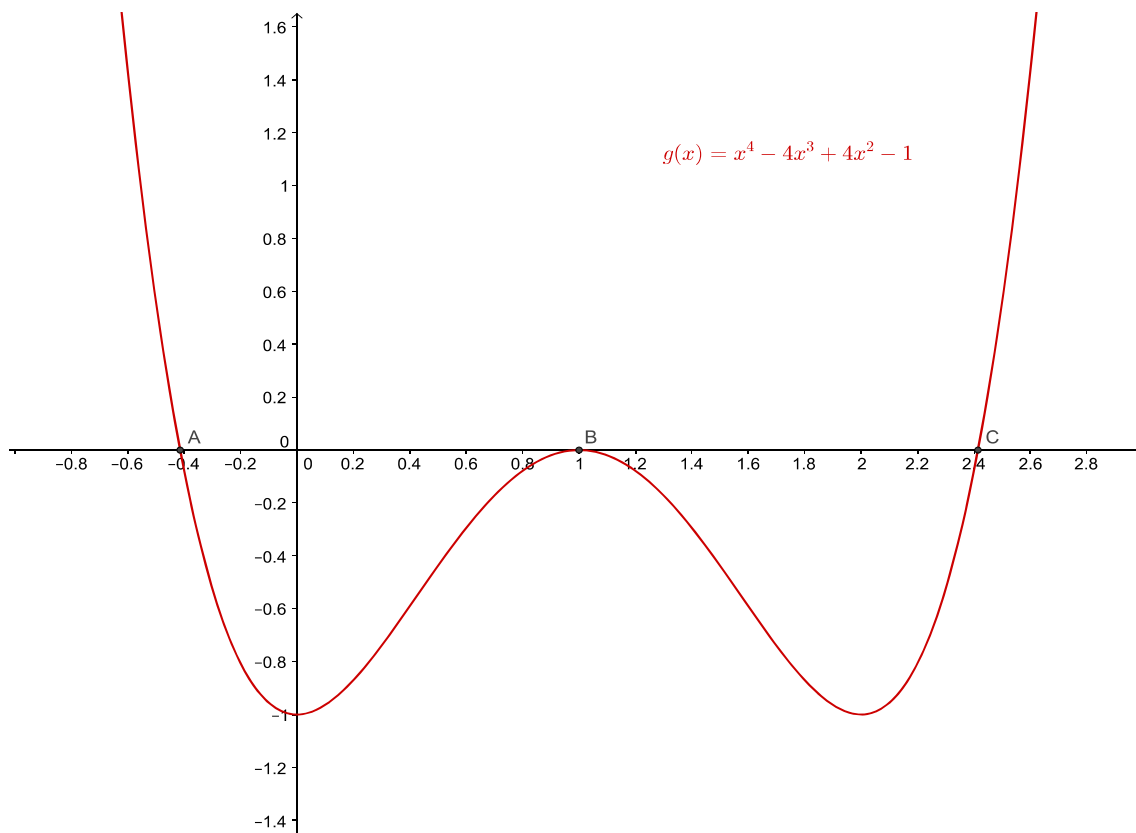
L'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions : $x = 1$, une solution dans l'intervalle $] -\infty; 0]$
et une solution dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

Remarque : avec un peu d'entraînement, les trois premiers coefficients nous conduisent à écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 \\ &= x^2(x^2 - 4x + 4) - 1 \\ &= x^2(x-2)^2 - 1 \\ &= [x(x-2)]^2 - 1^2 \\ &= [x(x-2)+1][x(x-2)-1] \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 1) \\ &= (x-1)^2(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

Ainsi, les deux solutions non entières de l'équation $g(x) = 0$ sont les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ à savoir (vérifiez-le !) : $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de la fonction g .



N°96 page 78

1. Il semblerait que l'équation $f(x) = 0$ admette une unique solution pour $x = 1$ (cette valeur de x correspond, sur l'axe des abscisses, à la première graduation à droite de l'origine du repère. Le curseur correspond à un point donc l'abscisse correspond elle-même à la deuxième graduation. Or cette abscisse vaut 2 (cf. l'écran en bas à droite)).
2. La fonction f est polynomiale et donc dérivable sur \mathbb{R} .
Pour tout réel x , on a : $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 5,96 = 6x^2 - 12x + 5,96$.
Nous pouvons bien sûr résoudre $f'(x) = 0$ en calculant un discriminant ... Mais le programme de seconde n'est pas aussi loin que nous ne puissions pas nous montrer un peu plus « malins » :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 12x + 5,96 \\ &= 6x^2 - 12x + 6 - 0,04 = 6(x^2 - 2x + 1) - 0,04 \\ &= 6(x-1)^2 - 0,2^2 = 6\left[(x-1)^2 - \frac{0,2^2}{6}\right] \\ &= 6\left[(x-1)^2 - \left(\frac{1}{5\sqrt{6}}\right)^2\right] = 6\left[(x-1)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{30}\right)^2\right] \\ &= 6\left(x-1-\frac{\sqrt{6}}{30}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{6}}{30}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $f'(x) = 0$ admet pour solutions :

$$1 - \frac{\sqrt{6}}{30} \approx 0,918 \text{ et } 1 + \frac{\sqrt{6}}{30} \approx 1,082$$

On en déduit immédiatement :

- $f'(x) > 0$ pour tout réel x dans $\left]-\infty; 1 - \frac{\sqrt{6}}{30}\right[\cup \left]1 + \frac{\sqrt{6}}{30}; +\infty\right[$.
- $f'(x) < 0$ pour tout réel x dans $\left]1 - \frac{\sqrt{6}}{30}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{30}\right[$.
- $f'\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{30}\right) = f'\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{30}\right) = 0$.

Et donc :

- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty; 1 - \frac{\sqrt{6}}{30}\right]$ et $\left]1 + \frac{\sqrt{6}}{30}; +\infty\right[$.
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]1 - \frac{\sqrt{6}}{30}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{30}\right[$.

$$\text{On a enfin : } f\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{30}\right) \approx 0,002 > 0 \text{ et } f\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{30}\right) \approx -0,002 < 0.$$

Sur l'intervalle $\left]-\infty; 1 - \frac{\sqrt{6}}{30}\right]$, la fonction f est continue (en tant que fonction polynômiale) et strictement croissante.

Par ailleurs, pour tout x non nul, on a : $f(x) = x^3 \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{5,96}{x^2} - \frac{1,96}{x^3} \right)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5,96}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1,96}{x^3} = 0$, il vient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Enfin : $f\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{30}\right) \approx 0,002 > 0$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction f prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left] -\infty ; f\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{30}\right) \right]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, on en déduit finalement :

Sur l'intervalle $\left] -\infty ; 1 - \frac{\sqrt{6}}{30} \right]$, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution.

En raisonnant de façon similaire sur les intervalles $\left[1 - \frac{\sqrt{6}}{30} ; 1 + \frac{\sqrt{6}}{30} \right]$ et $\left[1 + \frac{\sqrt{6}}{30} ; +\infty \right]$, on montre que l'équation $f(x) = 0$ admet également exactement une solution sur chacun d'eux.

En définitive :

L'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions sur \mathbb{R} .

La conjecture formulée à la question 1 était donc inexacte.

3. La factorisation considérée ne « tombe pas du ciel » ! On aura noté que la somme des coefficients de $2x^3 - 6x^2 + 5,96x - 1,96$ est égale à 0. On en déduit immédiatement que l'équation $f(x) = 0$ admet 1 comme « solution évidente ». D'où le facteur « $x - 1$ » dans la factorisation.

Pour tout réel x , on a : $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$.

On veut $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5,96x - 1,96 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$ pour tout x réel.

En procédant par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2 = a \\ -6 = b - a \\ 5,96 = c - b \\ -1,96 = -c \end{cases}$$

On obtient facilement : $a = 2$, $b = -4$ et $c = 1,96$ soit :

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5,96x - 1,96 = (x-1)(2x^2 - 4x + 1,96)$$

Pour factoriser $2x^2 - 4x + 1,96$, on peut procéder comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 1,96 &= 2x^2 - 4x + 2 - 0,04 = 2(x^2 - 2x + 1) - 0,04 \\ &= 2(x-1)^2 - 0,2^2 = 2\left[(x-1)^2 - \frac{0,2^2}{2}\right] \\ &= 2\left[(x-1)^2 - \left(\frac{0,2}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = 2\left[(x-1)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2\right] \\ &= 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \end{aligned}$$

L'équation $2x^2 - 4x + 1,96 = 0$ admet donc pour solutions :

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0,859 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 1,141$$

Finalement :

Les 3 solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont : $1 - \frac{\sqrt{2}}{10}$, 1 et $1 + \frac{\sqrt{2}}{10}$.

N°98 page 78

Dans tous les calculs, les longueurs seront exprimées en cm.

1. Une fois l'eau versée, le volume occupé par l'eau est la bille est celui d'un cylindre de rayon de base $r = 10$ et de hauteur h_1 le diamètre de la première bille, soit 8 cm.

Le volume V_1 de ce cylindre vaut donc : $V_1 = \pi r^2 h_1 = \pi \times 10^2 \times 8 = 800\pi$.

Pour obtenir le volume d'eau versé V , il suffit de soustraire à V_1 le volume de la bille. En

notant r_1 le rayon de la bille, son volume vaut : $\frac{4}{3}\pi \times r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \times 4^3 = \frac{256}{3}\pi$.

$$V = V_1 - \frac{4}{3}\pi \times r_1^3 = 800\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{2144}{3}\pi$$

Le volume d'eau versé dans le récipient vaut $\frac{2144}{3}\pi \text{ cm}^3$.

2. Le rayon de base du récipient étant égal à 10 cm, il vient immédiatement, en partant du principe (un peu excessif ... ☺) qu'une bille de rayon 10 cm entrerait dans le cylindre et qu'une bille de rayon nul peut présenter un certain intérêt (au moins au plan ... mathématique !):

$$R \in [0; 10]$$

3. Le volume « bille + eau » est égal à :

- Celui du volume d'eau vers, soit $\frac{2144}{3}\pi$, auquel on ajoute celui d'une bille de rayon R , soit $\frac{4}{3}\pi R^3$: $\frac{2144}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi R^3$.
- Celui d'un cylindre de rayon de base $r = 10$ et de hauteur le diamètre de la nouvelle bille, soit $2R$: $\pi r^2 \times 2R = \pi \times 10^2 \times 2R = 200\pi R$.

Le rayon R cherché vérifie donc : $\frac{2144}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi R^3 = 200\pi R$.

Il est donc solution de l'équation : $\frac{2144}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi x^3 = 200\pi x$.

Or, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2144}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi x^3 &= 200\pi x \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi(536 + x^3) &= 200\pi x \\ \Leftrightarrow 536 + x^3 &= 150x \\ \Leftrightarrow x^3 - 150x + 536 &= 0\end{aligned}$$

Le rayon R est solution de l'équation :

$$x^3 - 150x + 536 = 0 \quad (E)$$

Remarque : on vérifie facilement que $x = 4$ est solution de cette équation.

4. Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f : x \mapsto x^3 - 150x + 536$$

La fonction f étant polynômiale, elle est dérivable sur $[0; 10]$ et on a, pour tout réel x de cet intervalle :

$$f'(x) = 3x^2 - 150 = 3(x^2 - 50) = 3(x - \sqrt{50})(x + \sqrt{50}) = 3(x - 5\sqrt{2})(x + 5\sqrt{2})$$

Comme : $-5\sqrt{2} < 0 < 5\sqrt{2} < 10$, on a :

- $\forall x \in [0; 5\sqrt{2}[, f'(x) < 0$.
- $\forall x \in]5\sqrt{2}; 10] , f'(x) > 0$.
- $f'(5\sqrt{2}) = 0$.

Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 5\sqrt{2}]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[5\sqrt{2}; 10]$.

Comme $f(4) = 0$, la fonction f prend des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $]0; 5\sqrt{2}]$ avec :

$$f(5\sqrt{2}) = (5\sqrt{2})^3 - 150 \times 5\sqrt{2} + 536 = 250\sqrt{2} - 750\sqrt{2} + 536 = 536 - 500\sqrt{2} \approx -171,1$$

Sur l'intervalle $[5\sqrt{2}; 10]$, la fonction f est continue comme fonction polynômiale. Elle y est strictement croissante et on a : $f(5\sqrt{2}) = 536 - 500\sqrt{2} \approx -171,1 < 0$ et

$$f(10) = 10^3 - 150 \times 10 + 536 = 1000 - 1500 + 536 = 36 > 0.$$

Comme $0 \in [f(5\sqrt{2}); f(10)]$, on déduit de ce qui précède, d'après le théorème de la bijection, que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[5\sqrt{2}; 10]$.

Comme $5\sqrt{2} \approx 7,07$ on peut commencer par tabuler f sur l'intervalle $[7; 10]$ avec un pas de 1. On obtient $f(9) = -85 < 0 < 36 = f(10)$ et on en tire : $9 < \alpha < 10$.

On tabule alors f sur l'intervalle $[9; 10]$ avec un pas de 0,1. On obtient

$$f(9,7) \approx -6,3 < 0 < 7,2 \approx f(9,8) \text{ et on en tire : } 9,7 < \alpha < 9,8.$$

Pour obtenir une valeur approchée à 0,1 de α , il suffit alors de connaître le signe de $f(9,75)$. A la calculatrice, on obtient facilement : $f(9,75) \approx 0,4 > 0$.

On a donc : $f(9,7) \approx -6,3 < 0 < 0,4 \approx f(9,75)$. On en déduit alors : $9,7 < \alpha < 9,75$ et enfin : $\alpha \approx 9,7$.

Le problème admet une solution dont la valeur approchée à 0,1 cm est 0,7.

A titre de complément, je vous propose une approche plus algébrique de la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

La fonction f s'annule pour $x = 4$. Comme il s'agit d'une fonction polynômiale, on peut factoriser $f(x)$ par $x - 4$ et on a : $f(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$.

En développant, il vient : $f(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 4a)x^2 + (c - 4b)x - 4c$.

En procédant pas identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = -150 \\ -4c = 536 \end{cases}$$

On obtient facilement : $a = 1$, $b = 4$ et $c = -134$.

D'où : $f(x) = (x - 4)(x^2 + 4x - 134)$.

On résout alors $x^2 + 4x - 134 = 0$.

Le discriminant associé vaut : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-134) = 4 \times (4 + 134) = 4 \times 138 = (2\sqrt{138})^2$.

D'où les racines :

$$x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{138}}{2} = -2 - \sqrt{138} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{138}}{2} = -2 + \sqrt{138} \approx 9,7$$

La valeur x_1 ne nous intéresse pas puisqu'elle n'appartient pas à l'intervalle $[0; 10]$.

C'est en revanche le cas pour x_2 : on a ainsi retrouvé une deuxième solution à notre équation. Mieux, on en connaît en fait la valeur exacte : $\sqrt{138} - 2$.

N°118 page 85

1. Pour tout x réel strictement positif : $f(x) = \frac{1 - x^4}{x}$.

En tant que fonction rationnelle définie sur \mathbb{R}_+^* , f est dérivable sur cet intervalle et pour

tout x réel strictement positif, on a : $f'(x) = \frac{-4x^3 \times x - (1 - x^4) \times 1}{x^2} = \frac{-3x^4 - 1}{x^2}$.

Pour tout x réel non nul, on a : $x^2 > 0$ et $x^4 > 0$. On en déduit $-3x^4 - 1 < 0$ et, finalement : $f'(x) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x^3) = -0^3 = 0$. Alors, par addition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$. Alors, par addition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

En tant que fonction rationnelle définie sur \mathbb{R}_+^* , f est continue sur cet intervalle.

Elle y est strictement décroissante.

Enfin : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

On en déduit immédiatement, d'après le théorème de bijection, que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution a sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* .

L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution a sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* .

2. On a immédiatement $f(1) = 0$. On en déduit immédiatement : $0 < a < 1$.

En tabulant f sur l'intervalle $[0,1; 1]$ avec un pas égal à 0,1 on obtient :

$$f(0,8) \approx 0,74 < 1 < 1,09 \approx f(0,7) \text{ et donc : } 0,7 < a < 0,8.$$

En tabulant f sur l'intervalle $[0,7; 0,8]$ avec un pas égal à 0,01 on obtient :

$$f(0,73) \approx 0,98 < 1 < 1,02 \approx f(0,72) \text{ et donc : } 0,72 < a < 0,73.$$

En tabulant f sur l'intervalle $[0,72; 0,73]$ avec un pas égal à 0,001 on obtient :

$$f(0,725) \approx 0,998 < 1 < 1,002 \approx f(0,724) \text{ et donc : } 0,724 < a < 0,725.$$

On a enfin : $f(0,7245) \approx 0,9999 < 1$ et donc : $0,724 < a < 0,7245$.

Finalement : $a \approx 0,724$ à 10^{-3} près.

$a \approx 0,724$ à 10^{-3} près.

N°129 page 87

Un résultat classique ... que l'on rencontre classiquement en prépa ! ☺

L'idée, finalement assez « simple », consiste à étudier la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto f(x) - x$$

Puisque la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 1]$, il en va de même pour la fonction g .

On cherche à montrer que la fonction g s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[0; 1]$.

La fonction g est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ comme différence de deux fonctions qui y sont elles-mêmes continues.

Enfin, on a :

- $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ puisque f prend ses valeurs dans $[0; 1]$.
- $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ puisque f prend ses valeurs dans $[0; 1]$.

Si $g(0) = f(0) = 0$ alors on en conclut immédiatement que 0 est solution de l'équation $f(x) = x$.

Si $g(1) = f(1) - 1 = 0$ alors on en conclut immédiatement que 1 est solution de l'équation $f(x) = x$.

Si $g(0) = f(0) > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à la fonction g), on en conclut que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

Le résultat est établi.

Si une fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[0; 1]$ et prend ses valeurs dans ce même intervalle
alors l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

N°141 page 89

a. FAUX

Si on avait $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de l'intervalle $[-1; 0]$, on en déduirait que la fonction f est croissante sur cet intervalle. Il n'y a aucune raison a priori que ce soit le cas !

On peut construire un contre-exemple en cherchant une fonction polynômiale de degré 3 vérifiant les conditions de l'énoncé. On trouve, par exemple : $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

En se limitant à l'intervalle $[-1; 0]$, cette fonction est (strictement) croissante sur

$\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$.

b. VRAI

La fonction f est dérivable et donc continue sur l'intervalle $[-1; 0]$.

On a $f(-1) = 0 < \frac{1}{2} < 1 = f(0)$.

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; 0]$. Comme $f(-1) = 0 \neq \frac{1}{2}$ et $f(0) = 1 \neq \frac{1}{2}$, on en déduit finalement qu'une telle solution appartient nécessairement à l'intervalle $] -1; 0[$.

c. FAUX

En raisonnant comme ci-dessus mais cette fois sur l'intervalle $[0; 1]$, on montre que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$. Il n'y a aucune raison à priori pour que cette solution soit unique ! Certes, on conclurait dans ce sens si f était strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$ mais on peut également imaginer une fonction non monotone sur cet intervalle et telle que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admette exactement une solution ...

d. VRAI

D'après ce que nous avons écrit en b et c , l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $] -1; 0[$ et au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$. On en conclut donc que cette équation admet au moins deux solutions dans l'intervalle $[-1; 1]$ dans lequel est inclus $] -1; 0[\cup]0; 1[$.

e. FAUX

Comme précisé en c , il n'y a aucune raison, à priori, que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admette exactement une solution dans l'intervalle $] -1; 0[$ et exactement une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.

Un exemple (qui est donc ici un contre-exemple ! ☺) valant plus qu'un long discours, vous trouverez ci-après la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ par : $f : x \mapsto \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right)$. Elle vérifie les conditions imposées et l'équation

$f(x) = \frac{1}{2}$ admet 6 solutions sur l'intervalle $[-1; 1]$.

