
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Corrigés d'exercices

N°66 page 57

1. a) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 - \frac{3}{2} \times 2x + 4 \times 1 = x^3 - 3x + 4$.

$$f'(x) = x^3 - 3x + 4$$

b) Pour tout x réel, on a : $f''(x) = 3x^2 - 3 \times 1 + 0 = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$$f''(x) = 3(x^2 - 1)$$

2. a) Pour déterminer les variations de la fonction f' , nous étudions le signe de sa dérivée c'est-à-dire de la fonction f'' .

Pour tout x réel, on a : $f''(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

On en déduit immédiatement :

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$;
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1; +1[$.

Conclusion :

La fonction f' est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $[+1; +\infty[$
et strictement décroissante sur l'intervalle $]-1; +1[$.

b) On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Par ailleurs :

$$f'(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 4 = -1 + 3 + 4 = 6 \text{ et } f'(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

Ces valeurs, combinées au résultat obtenu à la question précédente nous permette de donner le tableau de variation de la fonction f' :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
f'	$-\infty$	↗		6	↘		$+\infty$
					2		

Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, la fonction f' est continue en tant que fonction polynôme et strictement croissante. Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ et $f'(-1) = 6$.

Or, $0 \in]-\infty; 6]$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure qu'il existe un unique réel c dans l'intervalle $]-\infty; -1]$, solution de l'équation $f'(x) = 0$.

Sur l'intervalle $[-1; +1]$, la fonction f' est strictement décroissante. On a donc :

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f'(-1) \geq f'(x) \geq f'(1)$$

C'est-à-dire : $6 \geq f'(x) \geq 2$.

La fonction f' ne s'annule donc pas sur l'intervalle $[-1; +1]$.

Sur l'intervalle $[+1; +\infty[$, la fonction f' est strictement croissante. On a donc :

$$x \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq f'(1)$$

C'est-à-dire : $f'(x) \geq 2$.

La fonction f' ne s'annule donc pas sur l'intervalle $f'(x) \geq 2$.

Conclusion :

L'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique c appartenant à l'intervalle $]-\infty; -1]$.

c) Nous procédons classiquement par tabulation.

Avec un pas de 1, on obtient : $f'(-3) = -14$ et $f'(-2) = 2$.

On en déduit : $-3 < c < -2$.

Avec un pas de 10^{-1} , on obtient : $f'(-2,2) = -0,048$ et $f'(-2,1) = 1,039$.

On en déduit : $-2,2 < c < -2,1$.

Enfin, avec un pas de 10^{-2} , on obtient : $f'(-2,2) = -0,048$ et $f'(-2,19) = 0,066\ 541$.

On en déduit finalement l'encadrement demandé :

$$-2,20 < c < -2,19$$

1. a) D'après l'étude menée à la question 2.b), on peut directement écrire :

- Pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; c[$, $f'(x) < 0$;
- $f'(c) = 0$;
- Pour tout réel x de l'intervalle $]c; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

b) Pour pouvoir dresser le tableau de variation de la fonction f , il convient de compléter les résultats de la question précédente par les calculs de limites en $-\infty$ et en $+\infty$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4} = +\infty$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{4} = +\infty$$

On a alors :

x	$-\infty$	c	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$		$f(c)$		$+\infty$

c) On a $f'(c) = 0$, c'est-à-dire : $c^3 - 3c + 4 = 0$. On en déduit : $c^3 = 3c - 4$.

Par ailleurs : $f(c) = \frac{c^4}{4} - \frac{3}{2}c^2 + 4c = \frac{c}{4} \times c^3 - \frac{3}{2}c^2 + 4c$.

D'où :

$$\begin{aligned}
 f(c) &= \frac{c}{4} \times (3c - 4) - \frac{3}{2}c^2 + 4c \\
 &= \frac{3}{4}c^2 - c - \frac{3}{2}c^2 + 4c \\
 &= -\frac{3}{4}c^2 + 3c = \frac{3c}{4}(-c + 4) \\
 &= \frac{3c(4 - c)}{4}
 \end{aligned}$$

On a bien :

$$f(c) = \frac{3c(4 - c)}{4}$$

d) D'après la question 2.c), on a $c < 0$.

On en tire immédiatement $4 - c > 0$ puis $f(c) = \frac{3c(4 - c)}{4} < 0$.

Sur l'intervalle $]-\infty; c]$, la fonction f est continue, en tant que fonction polynôme, et strictement décroissante (cf. question 2.a et 2.b).

Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(c) < 0$.

Or $0 \in]f(c); +\infty[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]-\infty; c]$.

On procède de façon similaire sur l'intervalle $[c; +\infty[$ et on conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle.

En définitive : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur \mathbb{R} .

La fonction polynôme f admet deux racines.
--