Dérivation

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°46 page 78

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\times x^4 + \frac{1}{2}\times 4x^3 - 2\times 3x^2 + 5 \\ &= 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 5}$$

N°47 page 78

La fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\times\sqrt{x} + (3x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x + (3x-1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{9x-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{9x-1}{2\sqrt{x}}}$$

N°48 page 78

La fonction *f* est dérivable sur tout intervalle de *D* en tant que fonction rationnelle et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)\times(x+2)-\left(x^2+x+1\right)\times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+5x+2-x^2-x-1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}}$$

N°49 page 78

La fonction *f* est dérivable sur *D* en tant que rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(1-\sin x)-(1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}}$$

N°50 page 78

La fonction *f* est dérivable sur *D* en tant que fonction rationnelle et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0\times\left(3x^2+5\right)-1\times 3\times 2x}{\left(3x^2+5\right)^2} \\ &= \frac{-6x}{\left(3x^2+5\right)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-6x}{\left(3x^2+5\right)^2}}$$

On pouvait également considérer la fonction *f* comme la composée de la fonction $x \mapsto 3x^2+5$ et de la fonction inverse. Il vient alors :

$$f'(x) = 6x \times \frac{-1}{\left(3x^2+5\right)^2} = \frac{-6x}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

On retrouve bien sûr le résultat obtenu précédemment.

N°51 page 78

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de deux fonctions polynômes, elles-mêmes dérivables sur $\mathbb{R}$: la fonction $x \mapsto x^2+3x-1$ et la fonction carrée. On a alors :

$$f'(x) = (2x+3)\times 2\left(x^2+3x-1\right) = 2(2x+3)\left(x^2+3x-1\right)$$

$$\boxed{f'(x) = 2(2x+3)\left(x^2+3x-1\right)}$$

N°54 page 78

1. Avec $f(x) = \frac{1}{x}$, on a immédiatement : $f'(x) = \boxed{-\frac{1}{x^2}} = -x^{-2}$.

   Puis : $f''(x) = -(-2)\times x^{-2-1} = 2x^{-3} = \boxed{\frac{2}{x^3}}$.

   Alors : $f^{(3)}(x) = 2\times(-3)\times x^{-3-1} = -6x^{-4} = \boxed{-\frac{6}{x^4}}$.

   Enfin : $f^{(4)}(x) = -6\times(-4)\times x^{-4-1} = 24x^{-5} = \boxed{\frac{24}{x^5}}$.

2. Il semblerait, d'après ce qui précède, que l'on ait :

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^n \times \frac{1\times 2\times 3\times \ldots \times n}{x^{n+1}}}$$

Remarque : je vous confirme que la conjecture précédente est vraie (nous l'établirons grâce au raisonnement par récurrence) !

N°55 page 78

Dans cet exercice, nous allons utiliser le fait que si une fonction *f* est dérivable sur un intervalle I alors la fonction g définie par $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable et admet pour fonction dérivée $g' : x \mapsto a \times f'(ax+b)$ (cf. le cours).

a) Ici, $a=\pi$ et $b=1$ d'où : $\boxed{f'(x)=\pi\cos(\pi x+1)}$;

b) Ici, $a=5$ et $b=-3$ d'où : $g'(x)=5\times 7(5x-3)^6$, soit : $\boxed{g'(x)=35(5x-3)^6}$;

c) Ici, $a=7$ et $b=-9$ d'où : $h'(x)=7\times\dfrac{1}{2\sqrt{7x-9}}$, soit : $\boxed{h'(x)=\dfrac{7}{2\sqrt{7x-9}}}$.

N°59 page 78

Remarque : la distance focale *f* est une donnée de l'exercice. Bien qu'aucune valeur numérique ne soit fournie, elle doit être traitée comme une constante.

a) On a la relation : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f}$. D'où : $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{p-f}{fp}$. Le membre de gauche ne pouvant être nul, on a : $p-f\neq 0$. Il vient alors, en considérant les inverses :

$$\boxed{q=\frac{fp}{p-f}}$$

b) Dans l'égalité précédente, on doit voir la distance *q* exprimée comme une fonction (rationnelle) de la variable *p*. Le nom de la fonction n'apparaissant pas explicitement, on peut utiliser la notation de Leibniz :

$$\frac{dq}{dp}=\frac{f\times(p-f)-fp\times 1}{(p-f)^2}=\frac{\cancel{fp}-f^2-\cancel{fp}}{(p-f)^2}=-\frac{f^2}{(p-f)^2}$$

$$\boxed{\frac{dq}{dp}=-\frac{f^2}{(p-f)^2}}$$

Remarque : le principe même de la lentille convexe de distance focale *f* fait qu'un objet situé à une très grande distance de la lentille (situation modélisée par $p\to+\infty$) donnera une image située à la distance *f* du centre de la lentille. Lorsque l'on fait tendre *p* vers $+\infty$, la relation $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f}$ donne bien $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f}$, soit $q=f$.

N°60 page 78

1. $f(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ et $f'(5) = 0$.
2. a. $f(x) = 1$ pour $x = 3$ ou $x = 5,5$;
   b. $f'(x) = 0$ pour $x = 3$ ou $x = 5$;
   c. $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [0;3] \cup [5;6]$.

N°62 page 79

Nous allons nous aider de la dérivée de la fonction *f* (dérivable en tant que fonction rationnelle).

Pour tout *x* réel, on a : $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Le dénominateur de $f(x)$ ne s'annulant pas, la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout *x* réel, il vient alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{2 \times 2x \times (x^2+1) - (2x^2-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= 2\frac{2x\left(\cancel{2x^2} + 2 \cancel{- 2x^2} + 1\right)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{12x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Pour tout *x* réel, on a : $\frac{12}{(x^2+1)^2} > 0$. Le signe de la dérivée est donc celui de *x*.

En notant que la dérivée ne s'annule que pour $x = 0$, on a facilement le résultat cherché :

- Si $x < 0$, $f'(x) < 0$. La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ (et également sur $]-\infty;0]$) ;
- Si $x > 0$, $f'(x) > 0$. La fonction *f* est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (et également sur $[0;+\infty[$).

N°65 page 79

Pour tout x strictement positif, notons que l'on a :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\times x+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2+3}{2\sqrt{3}x}=\frac{x^2+\frac{3}{2}}{\sqrt{3}x}.$$

1. Commençons par déterminer la limite en 0 à droite.

   On a immédiatement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times x\right)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

   On en déduit, par somme :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty}$$

   Puis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times x\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{x}\right)=0$.

   D'où, par somme encore :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

2. Pour tout x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2x^2}\\ &=\frac{2x^2-3}{2\sqrt{3}x^2}\\ &=\frac{x^2-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ f'(x)=\frac{x^2-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}x^2}}$$

3. A la question 1, nous avons déterminé les limites de la fonction f aux bornes de $\mathbb{R}^{+*}$. Il convient maintenant d'étudier le signe de la dérivée de f sur ce même ensemble.

Le dénominateur de f' est strictement positif en tant que produit d'un carré strictement positif et d'un facteur ($\sqrt{3}$) également strictement positif.
Le signe de f' est donc celui de son numérateur.

On a facilement : $x^2-\dfrac{3}{2}=\left(x-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, le facteur $x+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est strictement positif. Quant au facteur $x-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$:

- Sur $\left]0;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right[$, on a : $x-\sqrt{\dfrac{3}{2}}<0$;
- Sur $\left]\sqrt{\dfrac{3}{2}};+\infty\right[$, on a : $x-\sqrt{\dfrac{3}{2}}>0$.

En définitive :

- Sur $\left]0;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right[$, on a : $f'(x)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante ;
- Sur $\left]\sqrt{\dfrac{3}{2}};+\infty\right[$, on a : $f'(x)>0$ et la fonction *f* est strictement croissante

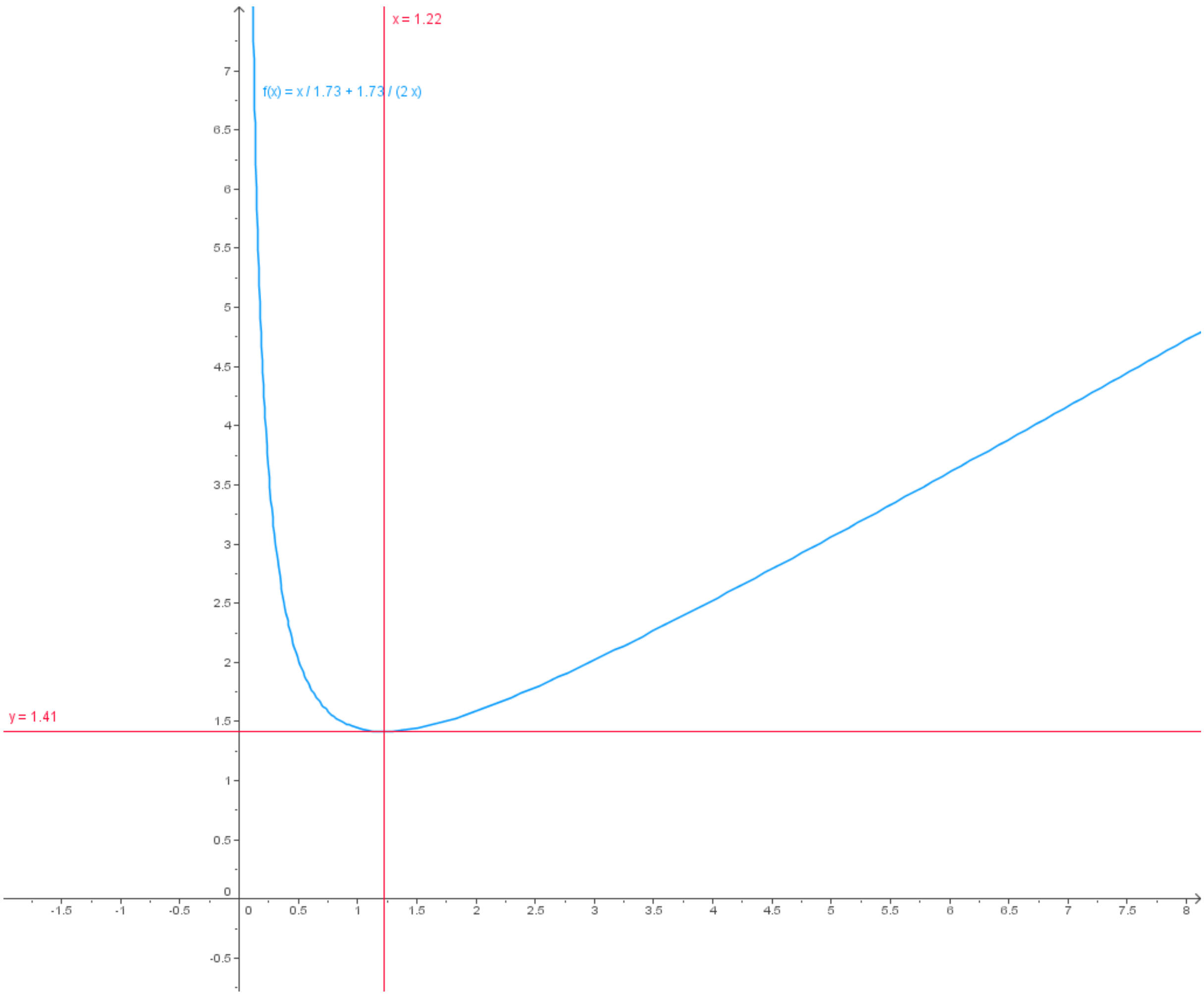
On a enfin :

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

On peut alors donner le tableau de variation de *f* :

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

D'où la courbe :



N°74 page 80

On peut poser : $v = v(L) = k\sqrt{\frac{L}{C}+\frac{C}{L}}$ où $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

La fonction v est la composée de la fonction rationnelle $L \mapsto \frac{L}{C}+\frac{C}{L}$ qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ (car L et C sont strictement positives) et de la fonction racine carrée. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a , en utilisant la notation de Leibniz :

$$\frac{dv}{dL}(L) = \left(\frac{1}{C}-\frac{C}{L^2}\right)\times k\frac{1}{2\sqrt{\frac{L}{C}+\frac{C}{L}}} = \frac{k}{2}\frac{L^2-C^2}{CL^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2+C^2}{CL}}}$$

$$= \frac{k}{2}\frac{L^2-C^2}{CL^2}\sqrt{\frac{CL}{L^2+C^2}} = \frac{k}{2}\frac{(L-C)(L+C)}{CL^2}\sqrt{\frac{CL}{L^2+C^2}}$$

Comme L et C sont strictement positives, le signe de la dérivée est donné par celui de la différence $L-C$:

- Si $L\in\left]0;C\right[$,on a $L-C<0$, c'est-à-dire $\frac{dv}{dL}(L)<0$ et la fonction v est strictement décroissante ;
- $\frac{dv}{dL}(C)=0$;
- Si $L>C$,on a $L-C>0$, c'est-à-dire $\frac{dv}{dL}(L)>0$ et la fonction v est strictement croissante ;

Pour $L=C$, la dérivée $\frac{dv}{dL}(L)$ s'annule en changeant de signe. On a donc affaire à un extremum. Par ailleurs, la dérivée est strictement négative à gauche de C et strictement positive à droite : la fonction v admet donc un minimum pour $L=C$.

En guise de complément : $v(C)=k\sqrt{\frac{C}{C}+\frac{C}{C}}=\sqrt{2}k$.

La vitesse est minimale pour une longueur d'onde égale à C et vaut alors $v(C)=\sqrt{2}k$.

N°90 page 81

1. La fonction *f* est rationnelle et donc dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}-\{-2\}$. Pour tout réel *x* de cet ensemble, on a :

$$f'(x)=\frac{-2x\times(2+x)-(1-x^2)\times 1}{(2+x)^2}=\frac{-4x-2x^2-1+x^2}{(2+x)^2}=\frac{-x^2-4x-1}{(2+x)^2}=-\frac{x^2+4x+1}{(2+x)^2}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\},\ f'(x)=-\frac{x^2+4x+1}{(2+x)^2}}$$

2. a. La fonction *g* est la composée de la fonction sinus et de la fonction *f*. Pour tout réel *t*, on peut écrire :

$$g(t)=f(\sin(t))$$

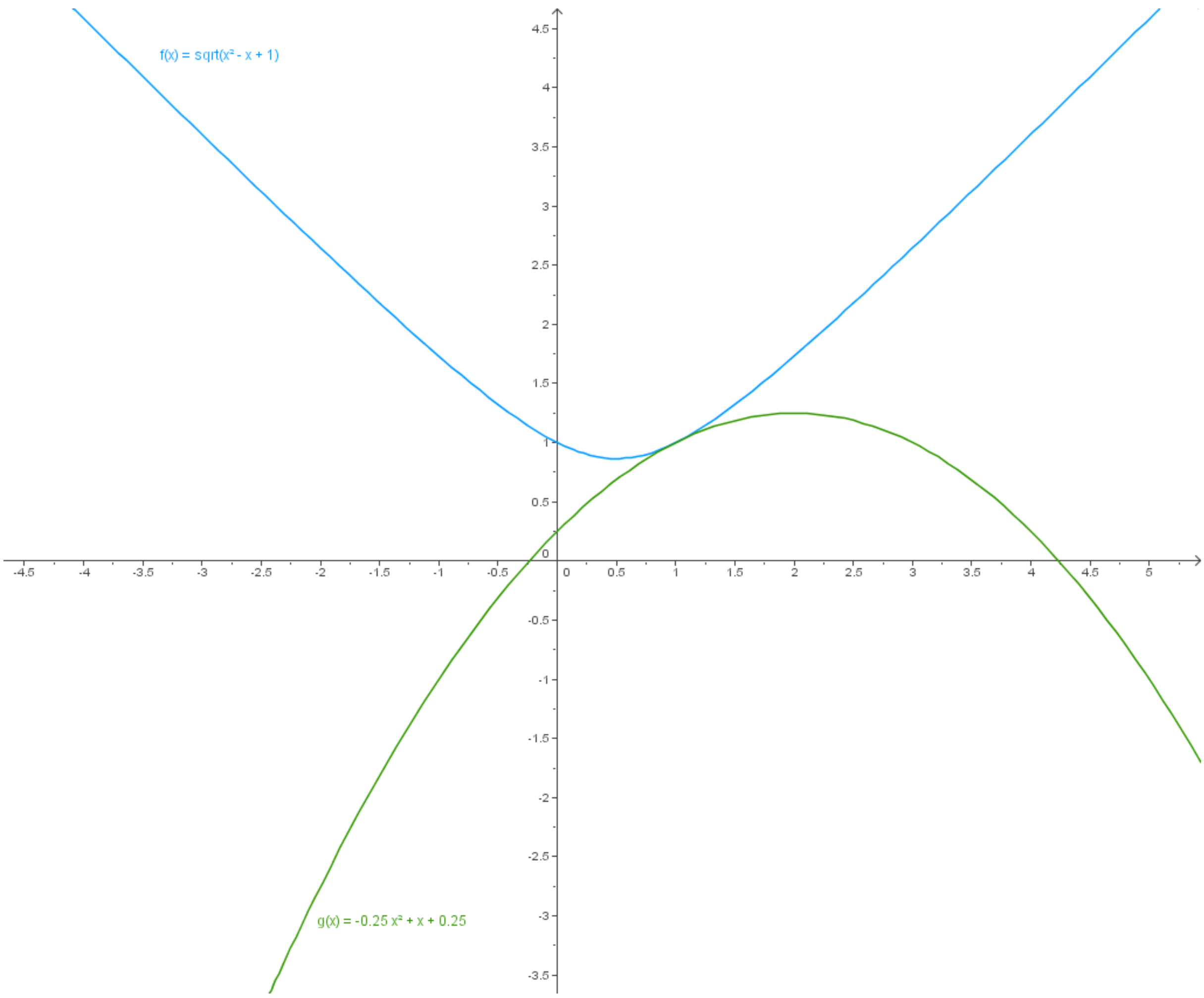
La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1;+1]$. Elle ne peut donc prendre la valeur -2. On en déduit que la fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout *t* réel, on a :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \cos(t)\times f'(\sin(t)) \\ &= \cos(t)\times\left(-\frac{\sin^2(t)+4\sin(t)+1}{(2+\sin(t))^2}\right) \\ &= -\cos(t)\times\frac{\sin^2(t)+4\sin(t)+1}{(2+\sin(t))^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ g'(t)=-\cos(t)\times\frac{\sin^2(t)+4\sin(t)+1}{(2+\sin(t))^2}}$$

N°110 page 86

1. A l'aide de Geogebra, on obtient :



2. On a d'abord : $f(1)=\sqrt{1^2-1+1}=\sqrt{1}=1$ et $g(1)=-\frac{1}{4}\times 1^2+1+\frac{1}{4}=1$.

Les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* passent toutes deux par le point de coordonnées $(1;1)$ (comme semble d'ailleurs l'indiquer la représentation graphique ci-dessus) que nous notons désormais A.

La fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Le discriminant associé au trinôme $x^2 - x + 1$ vaut -3. Comme le coefficient de x^2 est strictement positif, on en déduit que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 1 > 0$.
Par ailleurs, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On déduit de ce qui précède que la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de la fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ et de la fonction racine carrée.

Pour tout *x* réel, on a :

$$f'(x) = (2x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

En particulier : $f'(1) = \frac{2 \times 1 - 1}{2\sqrt{1^2 - 1 + 1}} = \frac{1}{2}$.

La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et on a, pour tout *x* réel :

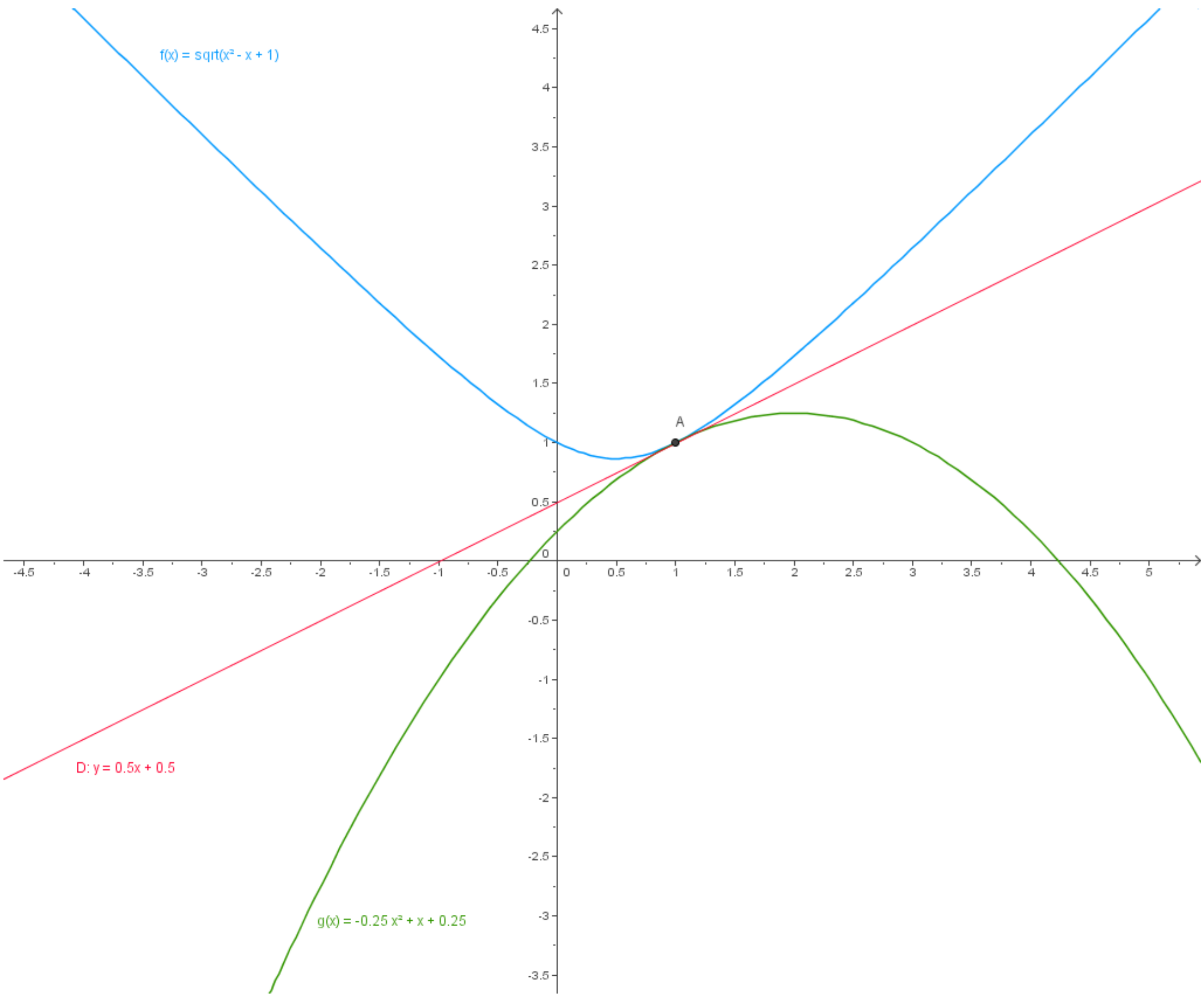
$$g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

En particulier : $g'(1) = -\frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2}$.

De ce qui précède, on tire que les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* se coupent au point $\mathrm{A}(1;1)$ et qu'en ce point, les tangentes ont même coefficient directeur. Elles sont donc confondues. Cette tangent commune est alors notée D.

Un équation de D est : $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$, soit : $\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$.

3. On obtient :



4. D'après le graphique précédent, il semblerait que la courbe représentative de la fonction *f* soit située au dessus de D et que celle de *g* soit située en dessous. Nous allons démontrer ces conjectures.

   Pour étudier, dans un premier temps, la position de la courbe représentative de *f* par rapport à D, nous devons étudier le signe de la différence : $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$.

   On a, pour tout *x* réel :

$$\begin{aligned} f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{2}(x+1) \\ &= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)\right] \end{aligned}$$

   Si $x+1\leq 0$ et comme $\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2-x+1}>0$ (cf. plus haut), on a immédiatement $2\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)>0$. Soit : $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)>0$.

Si $x+1>0$, l'expression conjuguée $2\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)$ est également strictement positive et il vient :

$$\begin{aligned}
f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\left[2\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)\right]\left[2\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)\right]}{2\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{4\left(x^2-x+1\right)-(x+1)^2}{2\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{3x^2-6x+3}{2\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)} \\
&= \frac{3}{2}\frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)}
\end{aligned}$$

Comme $(x-1)^2 \geq 0$, on conclut comme précédemment : $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\geq 0$. On constate, au passage, que la différence $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$ s'annule uniquement pour $x=1$.

En définitive : pour tout *x* réel, on a $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\geq 0$, l'égalité ayant lieu uniquement pour $x=1$. On peut donc conclure :

La courbe représentative de la fonction *f* est située au dessus de la droite D. Elle la coupe en un seul point : A.

Pour étudier, maintenant, la position de la courbe représentative de *g* par rapport à D, nous devons étudier le signe de la différence : $g(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$.

On a, pour tout *x* réel :

$$\begin{aligned}
g(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{4}\left(x^2-2x+1\right) \\
&= -\frac{1}{4}(x-1)^2
\end{aligned}$$

Un carré étant toujours positif, on a immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) \leq 0$,

l'égalité n'ayant lieu, ici encore, que pour $x=1$. On peut conclure :

La courbe représentative de la fonction *g* est située en dessous de la droite D. Elle la coupe en un seul point : A.