Droites et plans de l'espace.

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°24 page 342

a) On peut adopter deux approches.

D'une part, on constate que : $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{7}{12}=\frac{3+2+7}{12}=\frac{12}{12}=1$. Or, 1 est le coefficient du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le membre de gauche de l'égalité.
On en déduit immédiatement :

$$G=\text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{array}\right)$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)+\frac{7}{12}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\right)\Leftrightarrow$$
$$\cancel{\overrightarrow{AG}}=\cancel{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{7}{12}\right)\overrightarrow{AG}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{GC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{GD}\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{GC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

Remarque : pour simplifier (à peine !) les calculs, on aurait pu poser d'emblée :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow 12\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}$$

b) *ABCD* étant un tétraèdre, les points *B*, *C* et *D* ne sont pas alignés et on peut parler du plan (BCD). Puisque *G* est un barycentre de ces trois points, on peut en déduire immédiatement qu'il appartient au plan (BCD) :

Les points *B*, *C*, *D* et *G* sont coplanaires.

Remarque : comme les trois coefficients sont de même signe (en l'occurrence positifs), on peut plus précisément affirmer que le point *G* est situé à l'intérieur du triangle *BCD*.

N°27 page 342

Le point *G* est défini par la relation vectorielle :

$$-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

Nous allons montrer que le point *G* appartient à la droite (BP). Pour cela, il suffit de montrer que le point *G* est un barycentre des points *B* et *P*.

Nous disposons d'une unique donnée relative au point *P* : *CADP* est un parallélogramme. On a donc : $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PD}$.

On a alors :

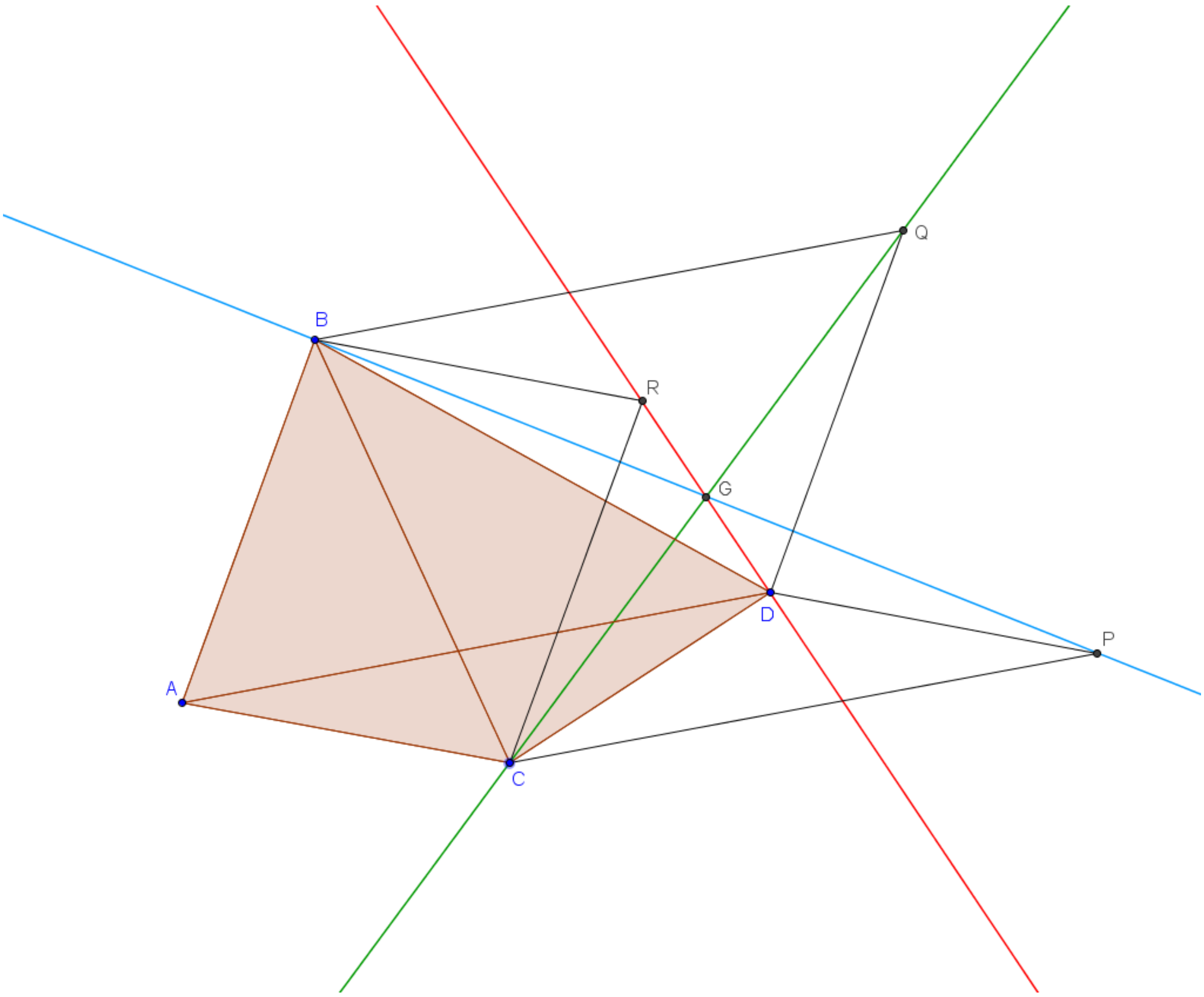
$$\begin{gathered}
-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \\
\cancel{-\overrightarrow{GA}}+\overrightarrow{GB}+\left(\cancel{\overrightarrow{GA}}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{GB}+\cancel{\overrightarrow{DP}}+\left(\overrightarrow{GP}+\cancel{\overrightarrow{PD}}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}
\end{gathered}$$

Le point *G* est donc le milieu du segment $[BP]$. Il appartient, de fait, à la droite (BP).

On montre de façon analogue que le point *G* est le milieu des segments $[CQ]$ et $[DR]$. Il appartient donc également aux droites (CQ) et (DR).

$G=\text{bar}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est le point de concours des droites (BP), (CQ) et (DR).

La figure ci-dessous illustre la situation proposée.



N°44 page 343

a) D'après l'énoncé, on a : $A(1;-1;2)$ et $M(-1+2t;1+t;-t)$.

On a alors :

$$G = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A & M \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + 2x_M) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + 2y_M) \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + 2z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(1+2(-1+2t)) \\ y_G = \frac{1}{3}(-1+2(1+t)) \\ z_G = \frac{1}{3}(2+2(-t)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t \\ y_G = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ z_G = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{G\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}t;\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t;\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t\right)}$$

b) Lorsque le point *M* décrit la droite D, le paramètre *t* varie dans $\mathbb{R}$ et on obtient comme ensemble des points G, l'ensemble défini par :

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t \quad , \ t\in\mathbb{R} \\ z=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t \end{cases}$$

On reconnaît la droite D' passant par $B\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ et de vecteur directeur $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.
On note que ce vecteur est colinéaire au vecteur directeur de D que nous tirons de la représentation paramétrique fournie : $(2;1;-1)$ (voir plus loin). Les droites D et D' sont donc parallèles.

L'ensemble des points *G* obtenus, lorsque le point *M* décrit la droite D est la droite D' passant par $B\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ et de vecteur directeur $(2;1;-1)$.

Le résultat ci-dessus ne doit pas nous étonner outre mesure (il était même en partie prévisible !). En effet, on a : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}$, soit $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$. Ou : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.
En d'autres termes, le point *G* est l'image du point *M* par l'homothétie *h* de centre *A* et de rapport $\frac{2}{3}$.
Par une homothétie, l'image d'une droite D passant par un point *P* sera la droite parallèle à D passant par l'image de *P*.
Il était donc prévisible que l'on obtienne une droite et que le vecteur directeur déduit de la représentation paramétrique soit colinéaire à celui de la droite D.
La droite D passe par le point $(-1;1;0)$. On déterminera son image par l'homothétie *h* et on retrouvera le point *B*.

N°47 page 344

a) Chaque équation du système définit un plan.

On obtient respectivement comme vecteurs normaux les vecteurs $\vec{n}_1(-9;18;6)$ et $\vec{n}_2(3;-6;-2)$. On constate que ces vecteurs sont colinéaires ($\vec{n}_1 = -3\vec{n}_2$).
On en déduit :

Le système proposé ne définit pas une droite de l'espace.

b) On a facilement (en divisant par -3) : $-9x+18y+6z-27=0 \Leftrightarrow 3x-6y-2z+9=0$.

On en déduit immédiatement :

Les plans d'équations $-9x+18y+6z-27=0$ et $3x-6y-2z+9=0$ sont confondus.

N°51 page 344

Soit $ax+by+cz+d=0$ une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ (nous ne savons pas encore s'il est unique ou non. Nous ne savons d'ailleurs pas encore si un tel plan existe !) contenant les deux droites (d) et (d').

On a :

$$\begin{aligned}(d)\subset\mathscr{P} &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ a(4+t)+b(5-2t)+c(-3+3t)+d=0 \Leftrightarrow\\ &\forall t\in\mathbb{R},\ (a-2b+3c)t+(4a+5b-3c+d)=0 \Leftrightarrow\\ &\begin{cases} a-2b+3c=0\\ 4a+5b-3c+d=0\end{cases}\end{aligned}$$

Et, de façon analogue :

$$\begin{aligned}(d')\subset\mathscr{P} &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ a(1+3t)+b(11-6t)+c(-4+t)+d=0 \Leftrightarrow\\ &\forall t\in\mathbb{R},\ (3a-6b+c)t+(a+11b-4c+d)=0 \Leftrightarrow\\ &\begin{cases} 3a-6b+c=0\\ a+11b-4c+d=0\end{cases}\end{aligned}$$

On a donc, finalement :

$$\begin{cases}(d)\subset\mathscr{P}\\(d')\subset\mathscr{P}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b+3c=0\\4a+5b-3c+d=0\\3a-6b+c=0\\a+11b-4c+d=0\end{cases}$$

La première et la troisième équation ne comportent pas de terme en « d ». On constate par ailleurs que leurs coefficients de « a » et « b » sont proportionnels. On a alors :

$$\begin{cases}a-2b+3c=0\\4a+5b-3c+d=0\\3a-6b+c=0\\a+11b-4c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b+3c=0\\3a-6b+c=0\\4a+5b-3c+d=0\\a+11b-4c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b+3c=0\\a-2b+\dfrac{c}{3}=0\\4a+5b-3c+d=0\\a+11b-4c+d=0\end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent immédiatement : $c=0$:

$$\begin{cases}a-2b+3c=0\\a-2b+\dfrac{c}{3}=0\\4a+5b-3c+d=0\\a+11b-4c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a-2b=0\\4a+5b+d=0\\a+11b+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=2b\\4a+5b+d=0\\a+11b+d=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}c=0\\a=2b\\4\times 2b+5b+d=0\\2b+11b+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=2b\\13b+d=0\\13b+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=2b\\d=-13b\end{cases}$$

Avec $b=1$, par exemple, on obtient l'équation cartésienne suivante du plan $\mathscr{P}$:

$$2x+y-13=0$$

Il existe un unique plan $\mathscr{P}$ contenant les droites (d) et (d').
Une de ses équations cartésienne est :
$2x+y-13=0$

N°58 page 344

a) La droite considérée est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ de vecteur directeur, le repère étant orthonormal : $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{5};-\frac{1}{4}\right)$. Ce vecteur est donc un vecteur directeur de la droite. On a donc directement la représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x=-3+\frac{1}{3}t \\ y=2+\frac{1}{5}t \quad , \ t\in\mathbb{R} \\ z=1-\frac{1}{4}t \end{cases}}$$

b) Puisque la droite considérée est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, le projeté orthogonal du point A sur ce plan est simplement le point d'intersection de cette droite avec $\mathscr{P}$.

Un point M de la droite a pour coordonnées $\left(-3+\frac{1}{3}t;2+\frac{1}{5}t;1-\frac{1}{4}t\right)$.

Le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$:

$$\begin{gathered} M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow \\ \frac{1}{3}\left(-3+\frac{1}{3}t\right)+\frac{1}{5}\left(2+\frac{1}{5}t\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}t\right)=1\Leftrightarrow \\ -1+\frac{1}{9}t+\frac{2}{5}+\frac{1}{25}t-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}t=1\Leftrightarrow \\ -3600+400t+1440+144t-900+225t=3600\Leftrightarrow \\ 769t=6660\Leftrightarrow \\ t=\frac{6660}{769} \end{gathered}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \left(-3+\frac{1}{3}t;2+\frac{1}{5}t;1-\frac{1}{4}t\right) &= \left(-3+\frac{1}{3}\times\frac{6660}{769};2+\frac{1}{5}\times\frac{6660}{769};1-\frac{1}{4}\times\frac{6660}{769}\right) \\ &= \left(-3+\frac{2220}{769};2+\frac{1332}{769};1-\frac{1665}{769}\right) \\ &= \left(\frac{682}{769};\frac{2870}{769};-\frac{896}{769}\right) \end{aligned}$$

Le point A', projeté du point A sur le plan $\mathscr{P}$, a pour coordonnées $\left(\frac{682}{769};\frac{2870}{769};-\frac{896}{769}\right)$.

N°69 page 345

On considère les trois plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ d'équations cartésiennes :

$$\mathscr{P} : x-2y+3z=5$$
$$\mathscr{Q} : 2x-y+5z=13$$
$$\mathscr{R} : x+4y+z=m$$

Où m est un paramètre réel.

On a :

$$M\left(x;y;z\right)\in\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}\cap\mathscr{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+3z=5\\2x-y+5z=13\\x+4y+z=m\end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases}x-2y+3z=5\\2x-y+5z=13\\x+4y+z=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x-4y+m\\x-2y+3z=5\\2x-y+5z=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x-4y+m\\x-2y+3\left(-x-4y+m\right)=5\\2x-y+5\left(-x-4y+m\right)=13\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}z=-x-4y+m\\-2x-14y=5-3m\\-3x-21y=13-5m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x-4y+m\\2x+14y=-5+3m\\3x+21y=-13+5m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x-4y+m\\2x+14y=-5+3m\\\frac{2}{3}\times\left(3x+21y\right)=\frac{2}{3}\times\left(-13+5m\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}z=-x-4y+m\\2x+14y=-5+3m\\2x+14y=\frac{2}{3}\left(-13+5m\right)\end{cases}$$

Les deux dernières équations nous conduisent à discuter suivant la valeur du paramètre m.

$$-5+3m=\frac{2}{3}\left(-13+5m\right)\Leftrightarrow-15+9m=-26+10m\Leftrightarrow m=11$$

On doit donc distinguer deux cas :

→ 1er cas : $m = 11$.

Le système initial est équivalent au système :

$$\begin{cases} z = -x - 4y + 11 \\ 2x + 14y = 28 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} z = -x - 4y + 11 \\ 2x + 14y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 4y + 11 \\ y = -\frac{1}{7}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 4\left(-\frac{1}{7}x + 2\right) + 11 \\ y = -\frac{1}{7}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = -x + \frac{4}{7}x - 8 + 11 \\ y = -\frac{1}{7}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{7}x + 3 \\ y = -\frac{1}{7}x + 2 \end{cases}$$

L'intersection des trois plans est donc la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{7}t + 2 \\ z = -\frac{3}{7}t + 3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

On peut en donner comme vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\left(1; -\frac{1}{7}; -\frac{3}{7}\right)$ ou le vecteur $\vec{u}(7;-1;-3)$. La droite (d) passe par ailleurs par le point $A(0;2;3)$.

→ 2ème cas : $m \neq 11$.

Le système initial équivaut à :

$$\begin{cases} z = -x - 4y + m \\ 2x + 14y = -5 + 3m \\ 2x + 14y = \frac{2}{3}(-13 + 5m) \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, ce système n'admet pas de solution : l'intersection des trois plans est vide.

Conclusion :

- Si $m = 11$, $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \cap \mathscr{R} = (d)$ où $(d) = (A;\vec{u})$ avec $A(0;2;3)$ et $\vec{u}(7;-1;-3)$;
- Si $m \neq 11$, $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} \cap \mathscr{R} = \varnothing$.

N°70 page 345

On commence car réordonner les équations de sorte que le coefficient de « x » de la première soit égal à 1 ou -1 :

$$\begin{cases} 3x + y + 4z = 10 \\ -x + y + 2z = 2 \\ -5x - y + 6z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = 10 \\ -5x - y + 6z = 8 \end{cases}$$

On change les signes des coefficients de la première équation de sorte que le coefficient de « x » soit égal à 1 :

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = 10 \\ -5x - y + 6z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 3x + y + 4z = 10 \\ -5x - y + 6z = 8 \end{cases}$$

Par combinaisons, on élimine la variable « x » de la deuxième et de la troisième équation :

$$\begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 3x + y + 4z = 10 \\ -5x - y + 6z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 3x + y + 4z - 3\times(x - y - 2z) = 10 - 3\times(-2) \\ -5x - y + 6z + 5\times(x - y - 2z) = 8 + 5\times(-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 4y + 10z = 16 \\ -6y - 4z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 2y + 5z = 8 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Par combinaison à nouveau, on élimine la variable « y » de la troisième équation (on va donc obtenir la valeur de « z ») :

$$\begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 2y + 5z = 8 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 2y + 5z = 8 \\ 3y + 2z - \frac{3}{2}\times(2y + 5z) = 1 - \frac{3}{2}\times 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 2y + 5z = 8 \\ -\frac{11}{2}z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ 2y + 5z = 8 \\ z = 2 \end{cases}$$

En « remontant », on obtient alors les deux autres inconnues :

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ 2y+5z=8 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2z=-2 \\ 2y+5\times 2=8 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2z=-2 \\ 2y=-2 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-(-1)-2\times 2=-2 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-2 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 3x+y+4z=10 \\ -x+y+2z=2 \\ -5x-y+6z=8 \end{cases}$ admet pour unique solution le triplet $(1;-1;2)$.

N°71 page 345

On procède de façon analogue à ce qui a été fait dans l'exercice précédent :

$$\begin{cases} 3a+4b+c=10 \\ a+2b-c=12 \\ a+b+c=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-\dfrac{5}{2} \\ a+2b-c-(a+b+c)=12-\left(-\dfrac{5}{2}\right) \\ 3a+4b+c-3\times(a+b+c)=10-3\times\left(-\dfrac{5}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-\dfrac{5}{2} \\ b-2c=\dfrac{29}{2} \\ b-2c=\dfrac{35}{2} \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont incompatibles : le système n'admet pas de solution.

Le système $\begin{cases} 3a+4b+c=10 \\ a+2b-c=12 \\ a+b+c=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$ n'admet pas de solution.

N°72 page 345

$$\begin{cases} x+7y-3z+2t=-25 \\ -3x+y+2z+t=-12 \\ x-y+z-t=10 \\ 4x-5y+z-12t=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ x+7y-3z+2t-\left(x-y+z-t\right)=-25-10 \\ -3x+y+2z+t+3\times\left(x-y+z-t\right)=-12+3\times 10 \\ 4x-5y+z-12t-4\times\left(x-y+z-t\right)=45-4\times 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z-t=10 \\ 8y-4z+3t=-35 \\ -2y+5z-2t=18 \\ -y-3z-8t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ -y-3z-8t=5 \\ 8y-4z+3t=-35 \\ -2y+5z-2t=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ 8y-4z+3t=-35 \\ -2y+5z-2t=18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ 8y-4z+3t-8\times\left(y+3z+8t\right)=-35-8\times\left(-5\right) \\ -2y+5z-2t+2\times\left(y+3z+8t\right)=18+2\times\left(-5\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ -28z-61t=5 \\ 11z+14t=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ 11z+14t=8 \\ -28z-61t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ z+\frac{14}{11}t=\frac{8}{11} \\ -28z-61t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ z+\frac{14}{11}t=\frac{8}{11} \\ -28z-61t+28\times\left(z+\frac{14}{11}t\right)=5+28\times\frac{8}{11} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ z+\frac{14}{11}t=\frac{8}{11} \\ -\frac{279}{11}t=\frac{279}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ z+\frac{14}{11}t=\frac{8}{11} \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ z-\frac{14}{11}=\frac{8}{11} \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ z=\frac{22}{11} \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3z+8t=-5 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y+3\times 2+8\times\left(-1\right)=-5 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y-2=-5 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y=-3 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z-t=10 \\ y=-3 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\left(-3\right)+2-\left(-1\right)=10 \\ y=-3 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=10 \\ y=-3 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases}$$

Finalement :

Le système : $\begin{cases} x+7y-3z+2t=-25 \\ -3x+y+2z+t=-12 \\ x-y+z-t=10 \\ 4x-5y+z-12t=45 \end{cases}$ admet un unique quadruplet solution : $(4;-3;2;-1)$.

N°74 page 345

Soit $M(x,y,z)$. Le point M appartient à tous les plans $\mathscr{P}_m$ équivaut à :

$$\forall m\in\mathbb{R},\ M(x,y,z)\in\mathscr{P}_m$$

On a alors :

$$\begin{gathered}\forall m\in\mathbb{R},\ M(x,y,z)\in\mathscr{P}_m \Leftrightarrow \\ \forall m\in\mathbb{R},\ (m^2+m)x+(2m+3)y+(m^2-1)z-4m-1=0 \Leftrightarrow \\ \forall m\in\mathbb{R},\ (x+z)m^2+(x+2y-4)m+(3y-z-1)=0\end{gathered}$$

Une équation du second degré (en m ici) s'annule pour une infinité de valeurs si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls. On a donc :

$$\forall m\in\mathbb{R},\ (x+z)m^2+(x+2y-4)m+(3y-z-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x+2y-4=0 \\ 3y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ x+2y=4 \\ 3y-(-x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ x+2y=4 \\ x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z=-x \\ x+2y=4 \\ x+3y-(x+2y)=1-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ x+2y=4 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ x-6=4 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ x=10 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=10 \\ y=-3 \\ z=-10 \end{cases}$$

On en conclut :

Le point $M(10;-3;-10)$ appartient à tous les plans $\mathscr{P}_m$ d'équations : $(m^2+m)x+(2m+3)y+(m^2-1)z-4m-1=0$, où $m\in\mathbb{R}$

N°77 page 346

Considérons une fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$F(x)=\left(x^3+bx^2+cx+d\right)\sqrt{x-1}$$

La fonction F est une primitive de la fonction $x\mapsto x^2\sqrt{x-1}$ si, et seulement si :

$$\forall x\in\left]1;+\infty\right[,\ F'(x)=x^2\sqrt{x-1}$$

Or, pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
F'(x)&=\left(3ax^2+2bx+c\right)\sqrt{x-1}+\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\\
&=\frac{\left(3ax^2+2bx+c\right)\sqrt{x-1}\times 2\sqrt{x-1}+\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)}{2\sqrt{x-1}}\\
&=\frac{2\left(3ax^2+2bx+c\right)(x-1)+\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)}{2\sqrt{x-1}}\\
&=\frac{2\left(3ax^3+(2b-3a)x^2+(c-2b)x-c\right)+\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)}{2\sqrt{x-1}}\\
&=\frac{7ax^3+(5b-6a)x^2+(3c-4b)x+(d-2c)}{2\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, sur ce même intervalle :

$$x^2\sqrt{x-1}=\frac{x^2\sqrt{x-1}\times 2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2x^2(x-1)}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2x^3-2x^2}{2\sqrt{x-1}}$$

On a donc :

$$\begin{gathered}
\forall x\in\left]1;+\infty\right[,\ F'(x)=x^2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\\
\forall x\in\left]1;+\infty\right[,\ \frac{7ax^3+(5b-6a)x^2+(3c-4b)x+(d-2c)}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2x^3-2x^2}{2\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow\\
\forall x\in\left]1;+\infty\right[,\ 7ax^3+(5b-6a)x^2+(3c-4b)x+(d-2c)=2x^3-2x^2\Leftrightarrow\\
\begin{cases}7a=2\\5b-6a=-2\\3c-4b=0\\d-2c=0\end{cases}
\end{gathered}$$

La résolution du système obtenu ne pose pas de difficulté particulière :

$$\begin{cases} 7a = 2 \\ 5b - 6a = -2 \\ 3c - 4b = 0 \\ d - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{7} \\ b = \dfrac{1}{5}(6a-2) \\ c = \dfrac{4}{3}b \\ d = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{7} \\ b = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{12}{7}-2\right) \\ c = \dfrac{4}{3}b \\ d = 2c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2}{7} \\ b = -\dfrac{2}{35} \\ c = \dfrac{4}{3}\times\left(-\dfrac{2}{35}\right) \\ d = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{7} \\ b = -\dfrac{2}{35} \\ c = -\dfrac{8}{105} \\ d = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{7} \\ b = -\dfrac{2}{35} \\ c = -\dfrac{8}{105} \\ d = -\dfrac{16}{105} \end{cases}$$

On a donc :

La fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$F(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 - \frac{2}{35}x^2 - \frac{8}{105}x - \frac{16}{105}\right)\sqrt{x-1}$$

est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2\sqrt{x-1}$ sur cet intervalle.

N°79 page 346

On a les équivalences :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow a\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + c\frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}c = 0 \Leftrightarrow a + b + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}c = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow b + \frac{\pi}{2}c = 0$$

$$f(\pi) = 0 \Leftrightarrow a\cos(\pi) + b\sin(\pi) + c\pi = 0 \Leftrightarrow -a + \pi c = 0$$

Les coefficients *a*, *b* et *c* sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} a+b+\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}c=0 \\ b+\dfrac{\pi}{2}c=0 \\ -a+\pi c=0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} a+b+\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}c=0 \\ b+\dfrac{\pi}{2}c=0 \\ -a+\pi c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}c=0 \\ b=-\dfrac{\pi}{2}c \\ a=\pi c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi c-\dfrac{\pi}{2}c+\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}c=0 \\ b=-\dfrac{\pi}{2}c \\ a=\pi c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi c\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=0 \\ b=-\dfrac{\pi}{2}c \\ a=\pi c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-\dfrac{\pi}{2}c \\ a=\pi c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

La fonction *f* est la fonction nulle.

N°81 page 346

a) Pour tout réel *x*, on a :

$$\begin{aligned} a+\frac{be^x}{e^x+1}+\frac{ce^x}{\left(e^x+1\right)^2} &= \frac{a\left(e^x+1\right)^2+be^x\left(e^x+1\right)+ce^x}{\left(e^x+1\right)^2} \\ &= \frac{a\left(e^{2x}+2e^x+1\right)+be^{2x}+be^x+ce^x}{\left(e^x+1\right)^2} \\ &= \frac{(a+b)e^{2x}+(2a+b+c)e^x+a}{\left(e^x+1\right)^2} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1} + \frac{ce^x}{\left(e^x+1\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{(a+b)e^{2x} + (2a+b+c)e^x + a}{\left(e^x+1\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 = (a+b)e^{2x} + (2a+b+c)e^x + a \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b=-a \\ c=-2a-b \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

D'où, finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}}$$

b) En utilisant le résultat précédent et la linéarité de l'intégrale, il vient :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx - \int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx$$

On a immédiatement : $\int_0^1 1dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1-0 = 1$.

Dans l'expression : $\frac{e^x}{e^x+1}$, la fonction au numérateur est la dérivée de la fonction au dénominateur : $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x+1$. Par ailleurs, pour tout x réel, e^x+1 est strictement positif. On en déduit que la fonction $x \mapsto \ln\left(e^x+1\right)$ est une primitive, sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$.

Il vient alors : $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1 = \ln\left(e^1+1\right)-\ln\left(e^0+1\right) = \ln\left(e+1\right)-\ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$.

Enfin, on a : $\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = e^x\left(e^x+1\right)^{-2} = u'(x)u^{-2}(x)$. Une primitive sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ est donc la fonction $-u^{-1} = -\frac{1}{u}$.

Il vient alors : $\int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx = \left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{e^1+1}-\left(-\frac{1}{e^0+1}\right) = -\frac{1}{e+1}+\frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx - \int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx \\
&= 1-\ln\frac{e+1}{2}-\left(-\frac{1}{e+1}+\frac{1}{2}\right) \\
&= 1+\ln\frac{2}{e+1}+\frac{1}{e+1}-\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}}$$