Equations différentielles

Corrigés d'exercices

Page 255 : N°**26**
Page 256 : N°**37**, **39**

Page 258 : N°**45**, **47**, **48**, **49**, **50**

N°26 page 255

a) L'équation se récrit : $y'=\frac{3}{2}y$. Elle est de la forme $y'=ay$ avec $a=\frac{3}{2}$ et admet donc pour solutions les fonctions de la forme :

$$x\mapsto Ce^{\frac{3}{2}x} \text{ où } C \text{ est une constante réelle}$$

b) Une fonction de la forme obtenue précédemment admet une courbe représentative dont l'équation est : $y=Ce^{\frac{3}{2}x}$. Pour $x=0$, il vient alors $y=C$. En d'autres termes : une courbe donnée coupera l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0;C)$.
On peut raisonnablement partir du principe que l'on peut lire graphiquement les ordonnées des points d'intersection des courbes avec l'axe des ordonnées.

- Pour $\mathscr{C}_1$, on obtient $C_1=\frac{5}{2}$ d'où l'équation : $y=\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}x}$;
- Pour $\mathscr{C}_2$, on obtient $C_2=1$ d'où l'équation : $y=e^{\frac{3}{2}x}$;
- Pour $\mathscr{C}_3$, on obtient $C_3=-\frac{1}{2}$ d'où l'équation : $y=-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}$;
- Pour $\mathscr{C}_4$, on obtient $C_4=-2$ d'où l'équation : $y=-2e^{\frac{3}{2}x}$.

N°37 page 256

a) La fonction *f* est solution de l'équation différentielle $3y'-6y=1$ et vérifie : $f'(1)=2$.
On a donc : $3f'(1)-6f(1)=1$, soit : $3\times 2-6f(1)=1$.

Il vient alors : $-6f(1)=1-6=-5$ et, finalement :

$$\boxed{f(1)=\frac{5}{6}}$$

b) On a : $3y'-6y=1 \Leftrightarrow y'=2y+\frac{1}{3}$. Nous avons donc affaire à une équation différentielle de la forme : $y'=ay+b$ avec $a=2$ et $b=\frac{1}{3}$.

Les solutions d'une telle équation s'écrivent : $y=ke^{ax}-\frac{b}{a}$ où *k* est une constante réelle.

Soit ici : $y=ke^{2x}-\frac{\frac{1}{3}}{2}=ke^{2x}-\frac{1}{6}$.

En particulier : $y(1)=ke^{2}-\frac{1}{6}$. D'après la question précédente, nous avons : $f(1)=\frac{5}{6}$.

Il vient donc : $y(1)=ke^{2}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. D'où : $ke^{2}=1$ et, finalement : $k=\frac{1}{e^{2}}=e^{-2}$.

La solution *f* est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-2}e^{2x}-\frac{1}{6}=e^{2(x-1)}-\frac{1}{6}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{2(x-1)}-\frac{1}{6}}$$

N°39 page 256

On considère l'équation différentielle : $2y'-4y=1$ **(E)** et la solution *f* vérifiant $f''(1)=-2$.

a) Soit *y* une solution de (E). On a donc : $2y'-4y=1$

Les solutions d'une telle équation sont indéfiniment dérivables. On dérive alors chaque membre de l'égalité ci-dessus et on obtient : $2y''-4y'=0$, ou : $y''-2y'=0$.

Finalement :

Pour tout réel *x*, on a : $y''(x)-2y'(x)=0$.

b) L'égalité précédente se récrit : $2y'(x)=y''(x)$. En remplaçant alors dans l'équation **(E)**, on obtient : pour tout *x* réel, $y''(x)-4y(x)=1$. Soit, finalement :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)=4y(x)+1}$$

c) Les égalités obtenues aux questions précédentes se récrivent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{4}\left[y''(x) - 1\right] \text{ et } y'(x) = \frac{1}{2}y''(x)$$

En particulier avec $x = 1$ et en tenant compte de $f''(1) = -2$:

$$f(1) = \frac{1}{4}\left[f''(x) - 1\right] = \frac{1}{4}(-2-1) = -\frac{3}{4} \text{ et } f'(1) = \frac{1}{2}f''(1) = \frac{1}{2}\times(-2) = -1$$

$$\boxed{f(1) = -\frac{3}{4} \text{ et } f'(1) = -1}$$

d) L'équation différentielle **(E)** se récrit : $y' = 2y + \dfrac{1}{2}$.

Elle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = \dfrac{1}{2}$.

Les solutions d'une telle équation s'écrivent : $y = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où k est une constante réelle.

Soit ici : $y = ke^{2x} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = ke^{2x} - \dfrac{1}{4}$.

En particulier : $y(1) = ke^{2} - \dfrac{1}{4}$. D'après la question précédente, nous avons : $f(1) = -\dfrac{3}{4}$.

Il vient donc : $y(1) = ke^{2} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}$.

D'où : $ke^{2} = -\dfrac{1}{2}$ et, finalement : $k = -\dfrac{1}{2e^{2}} = -\dfrac{1}{2}e^{-2}$.

La solution f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2}e^{2x} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}e^{2(x-1)} - \dfrac{1}{4}$.

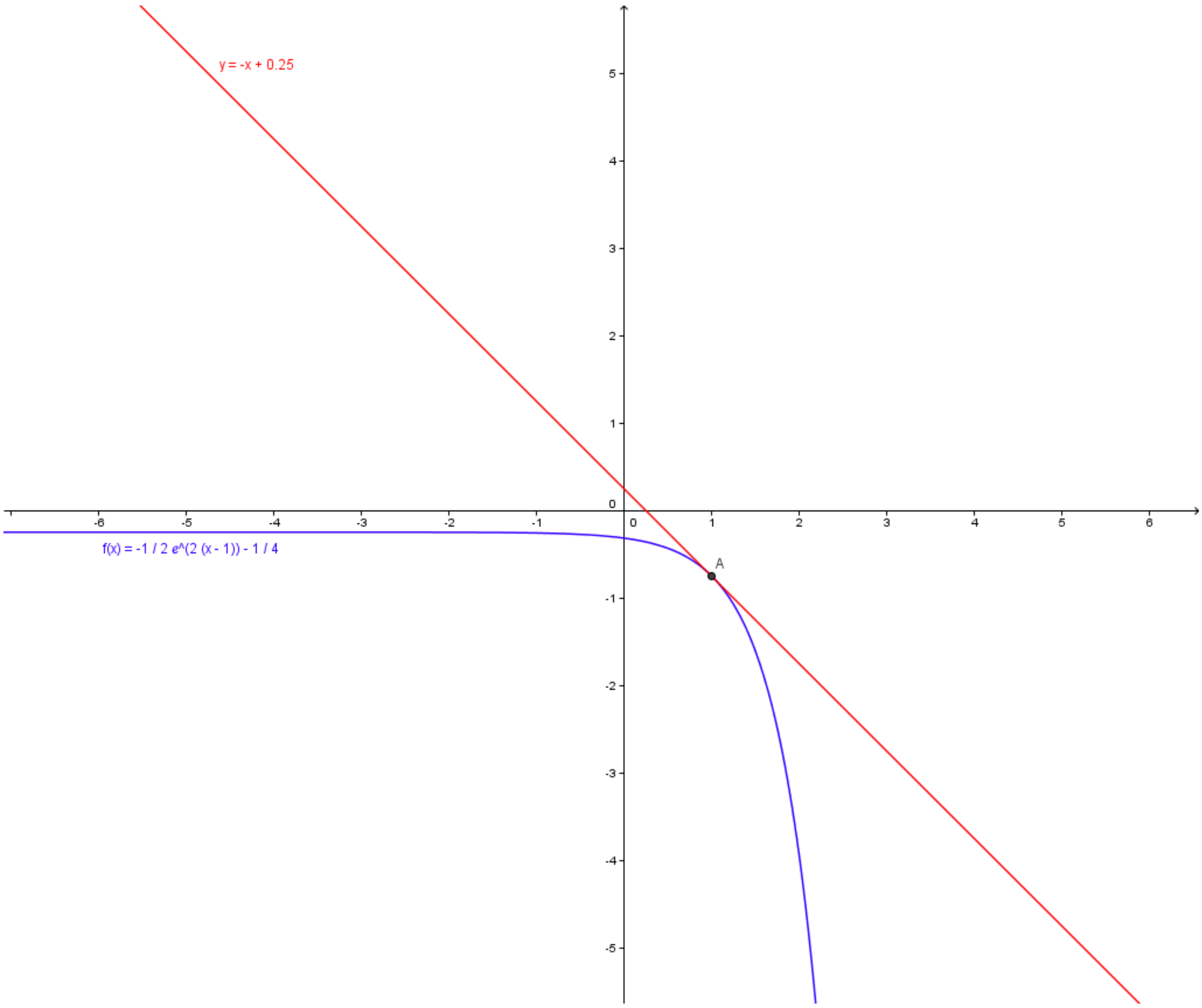
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{2}e^{2(x-1)} - \frac{1}{4}}$$

e) La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = 1$ admet pour équation réduite :

$$y = f'(1)\times(x-1) + f(1)$$

Soit, en tenant compte des résultats de la question c) : $y = -1\times(x-1) - \dfrac{3}{4} = -x + \dfrac{1}{4}$.

On obtient alors la figure ci-dessous.



N°45 page 258

En guise de préambule, notons que nous choisissons comme unité pour la variable « temps » t la minute.

Comme suggéré, nous notons $y(t)$ la quantité de sel en kilogrammes présente dans le réservoir à l'instant t.

Initialement, le réservoir contient de l'eau pure (i.e. ne contenant pas de sel).

On a donc : $\boxed{y(0)=0}$.

Contrairement à ce que suggère l'énoncé, notons dt une durée infinitésimale comprise entre les instants t et $t+dt$.

Puisque les débits entrant et sortant sont égaux (à $2L.\min^{-1}$) :

- le volume dV_e entrant dans le réservoir vaut : $dV_e = 2dt$;
- le volume dV_s sortant du réservoir vaut : $dV_s = 2dt$.

Bien évidemment, ces deux volumes ne contiennent pas la même quantité de sel !

La salinité de la solution aqueuse se déversant dans le réservoir est de $0,3kg.L^{-1}$. La quantité de sel dy_e contenue dans le volume entrant dV_e vaut donc : $dy_e = 0,3dV_e = 0,6dt$.

A l'instant *t*, le mélange du réservoir étant supposé homogène, sa salinité vaut : $\dfrac{y(t)}{10}$.
La quantité de sel dy_s contenue dans le volume sortant dV_s vaut donc :

$$dy_s = \frac{y(t)}{10}dV_s = \frac{y(t)}{10}\times 2dt = \frac{y(t)}{5}dt$$

En définitive :

- A l'instant t, le réservoir contient une quantité de sel égale à $y(t)$;
- Entre les instant *t* et $t+dt$:
  - La quantité de sel entrant dans le réservoir vaut : $0,6dt$;
  - La quantité de sel sortant du réservoir vaut : $\dfrac{y(t)}{5}dt$.

Si on note dy la variation de la quantité de sel dans le réservoir entre les instants *t* et $t+dt$, on a : $dy = 0,6dt - \dfrac{y(t)}{5}dt = \left(0,6 - \dfrac{y(t)}{5}\right)dt = \left(0,6 - 0,2y(t)\right)dt$.

Soit : $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = -0,2y + 0,6}$

On doit donc résoudre : $\dfrac{dy}{dt} = -0,2y + 0,6$ **(E)**, avec la condition initiale : $y(0) = 0$.

On a affaire à une équation différentielle de la forme : $y' = ay + b$ avec $a = -0,2$ et $b = 0,6$.
Les solutions d'une telle équation s'écrivent :

$$y = Ce^{at} - \frac{b}{a} = Ce^{-0,2t} - \frac{0,6}{-0,2} = Ce^{-0,2t} + 3$$

Où *C* est une constante réelle.

Il vient alors : $y(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^{-0,2\times 0} + 3 = 0 \Leftrightarrow C = -3$.

La solution de l'équation **(E)** s'écrit finalement : $y = -3e^{-0,2t} + 3 = 3\left(1 - e^{-0,2t}\right)$.

$$\boxed{y = y(t) = 3\left(1 - e^{-0,2t}\right)}$$

Remarque : dans cet exercice (comme dans bien d'autres !) une hypothèse très forte (excessive ?) est faite. Il s'agit de celle de l'homogénéité du mélange à tout instant dans le réservoir ! Dans les faits, il conviendrait de modéliser la diffusion de la solution salée dans le réservoir et ça, c'est une toute autre histoire ☺ !

N°47 page 258

a) L'équation différentielle se récrit, en divisant par m : $v' = -\frac{k}{m}v + g$ **(E)**.

Nous avons donc affaire à une équation différentielle de la forme : $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{k}{m}$ et $b = g$. Les solutions d'une telle équation s'écrivent :

$$y = Ce^{at} - \frac{b}{a} = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{g}{-\frac{k}{m}} = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

où C est une constante réelle.

La variable t mesurant le temps de chute et le corps étant lâché (i.e. sa vitesse initiale est nulle), on a comme condition initiale : $y(0) = 0$.

Il vient alors : $y(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{k}{m}\times 0} + \frac{mg}{k} = 0 \Leftrightarrow C + \frac{mg}{k} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{mg}{k}$.

La solution de l'équation **(E)** s'écrit finalement : $y = -\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

$$\boxed{y = y(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

Comme k est un réel strictement positif, on a : $\lim_{t \to +\infty}\left(-\frac{k}{m}t\right) = -\infty$.

D'où : $\lim_{t \to +\infty}\left(e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 0$ et, finalement : $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty}\left[\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right] = \frac{mg}{k}$.

La quantité $\frac{mg}{k}$ s'interprète alors comme la vitesse limite atteinte par le corps de masse m dans le cadre de ce modèle.

b) Une vitesse initiale v_0 est imprimée au corps à l'instant $t=0$. On a donc cette fois :

$$y(0)=v_0 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{k}{m}\times 0}+\frac{mg}{k}=v_0 \Leftrightarrow C+\frac{mg}{k}=v_0 \Leftrightarrow C=v_0-\frac{mg}{k}$$

La solution de l'équation **(E)** s'écrit alors :

$$y=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+v_0e^{-\frac{k}{m}t}.$$

$$\boxed{y=y(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+v_0e^{-\frac{k}{m}t}}$$

c) Cette question est assez délicate puisque l'on s'intéresse à l'expression ci-dessus lorsque le paramètre k tend vers 0 (sous-entendu les autres paramètres et la variable étant supposés fixés).

La quantité $-\frac{k}{m}t$ tend vers 0 lorsque k tend vers 0. Effectuons alors le changement de variable : $-\frac{k}{m}t=h$. Il vient :

$$\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+v_0e^{-\frac{k}{m}t}=-gt\times\frac{1-e^{-\frac{k}{m}t}}{-\frac{k}{m}t}+v_0e^{-\frac{k}{m}t}=gt\times\frac{e^h-1}{h}+v_0e^h$$

On a alors : $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^0=1$ (nombre dérivé de l'exponentielle en 0) et $\lim_{h\to 0}e^h=e^0=1$.

D'où :

$$\lim_{k\to 0}\left\{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+v_0e^{-\frac{k}{m}t}\right\}=\lim_{h\to 0}\left\{gt\times\frac{e^h-1}{h}+v_0e^h\right\}=gt+v_0$$

$$\boxed{\lim_{k\to 0}\left\{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+v_0e^{-\frac{k}{m}t}\right\}=gt+v_0}$$

On a ainsi retrouvé la loi de la chute libre d'un corps en l'absence de frottement (la vitesse est une fonction affine du temps).

N°48 page 258

Notons x_0 l'abscisse du point *m*. On a alors : $\mathrm{M}\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ en M s'écrit alors : $y = f'\left(x_0\right)\times\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$.

Le point T est le point de la tangente dont l'ordonnée est nulle.
On résout donc l'équation :

$$0 = f'\left(x_0\right)\times\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$$

Par hypothèse, on a : $f'\left(x_0\right) \neq 0$. Il vient donc :

$$0 = f'\left(x_0\right)\times\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right) \Leftrightarrow x - x_0 = -\frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)} \Leftrightarrow x = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}$$

On en déduit : $\mathrm{T}\left(x_0 - \dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)};0\right)$.

On peut alors fournir les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{m\mathrm{T}}$:

$$\overrightarrow{m\mathrm{T}}\left(-\frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)};0\right)$$

On cherche alors *f* vérifiant les conditions données (*f* dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée ne s'annulant jamais) et telles que : $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{m\mathrm{T}} = a\vec{i}$.

Pour alléger les notations, nous remplaçons l'écriture « x_0 » par « x » :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{m\mathrm{T}} = a\vec{i} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)} = a \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'\left(x\right) = -\frac{1}{a}f\left(x\right)$$

La fonction *f* est ainsi solution de l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{1}{a}y$. Elle est donc de la forme :

$$\boxed{f\left(x\right) = Ce^{-\frac{1}{a}x} \text{ où } C \text{ est une constante réelle}}$$

N°49 page 258

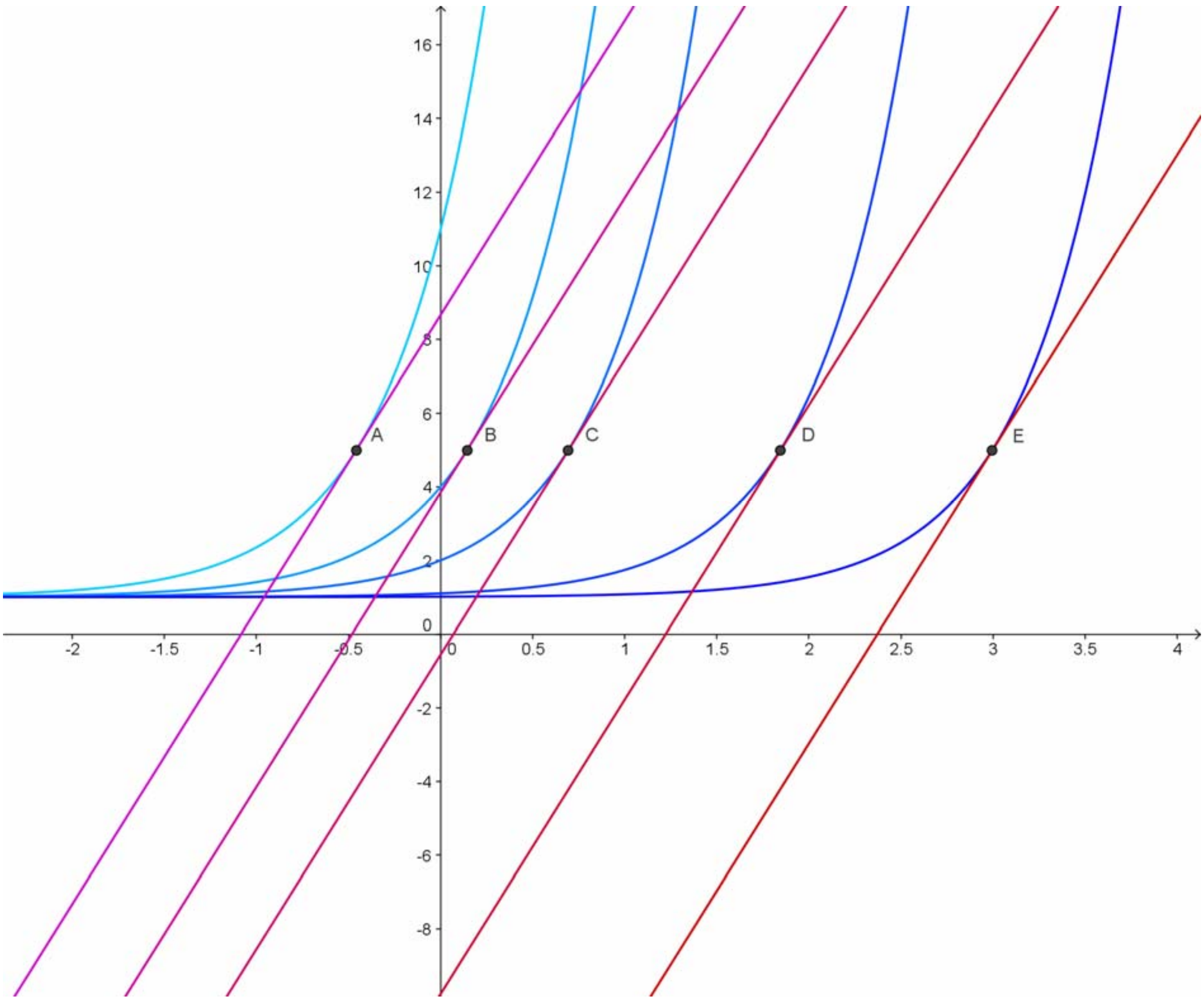
Soit β un réel donné et soit M_k le point d'ordonnée β de la courbe $\mathscr{C}_k$. Notons alors x_k son abscisse. On a donc : $M_k\left(x_k;\beta\right)$.

En un tel point, le coefficient directeur de la tangente est la valeur prise par la dérivée de la fonction y_k, c'est-à-dire : y_k'. Or, y_k étant solution de l'équation : $y'=ay+b$, on a :

$$y_k'\left(x_k\right)=ay_k\left(x_k\right)+b=a\beta+b$$

On constate que ce coefficient directeur ne dépend pas de k : les tangentes considérées ont toutes le même coefficient directeur ; elles sont donc parallèles.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives de fonctions de la forme : $x\mapsto Ce^{2x}+1$ et les tangentes correspondantes aux points d'ordonnée égale à 5.



N°50 page 258

Nous pouvons reprendre dans cet exercice les notations de l'exercice 48.

Dans ces conditions, on s'intéresse au point $\mathrm{M}\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ et au segment [MT] et on souhaite que son milieu soit situé sur l'axe des ordonnées, c'est-à-dire soit d'abscisse nulle.

Précisons d'abord que le point T existe si, et seulement si, on a : $f'\left(x_0\right) \neq 0$.

Dans ces conditions, on a vu à l'exercice 48 que l'on avait : $\mathrm{M}\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ et $\mathrm{T}\left(x_0 - \dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}; 0\right)$.

Si on note $\mathrm{I}\left(x_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{I}}\right)$ le milieu du segment [MT], on a immédiatement :

$$x_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left(x_0 + x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}\right) = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{2f'\left(x_0\right)}$$

Il vient alors :

$$x_{\mathrm{I}} = 0 \Leftrightarrow x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{2f'\left(x_0\right)} = 0 \Leftrightarrow 2f'\left(x_0\right) \times x_0 - f\left(x_0\right) = 0$$

On peut donc s'intéresser à l'équation différentielle : $2xy' - y = 0$.

Cette équation n'a pas la forme classique des équations étudiées dans ce chapitre …

On constate immédiatement que la seule fonction constante solution est la fonction nulle. Cependant, cette fonction est à exclure puisque sa dérivée est nulle (le point T n'est alors pas défini).

Le signe « - » fait penser au numérateur de la dérivée d'un rapport (penser à $\dfrac{y}{x}$) mais alors le facteur « 2 » nous « gêne ». Celui-ci peut nous faire penser à la dérivée d'un carré. Nous sommes renforcés dans cette idée en écrivant, pour $y \neq 0$:

$$2xy' - y = 0 \Leftrightarrow 2xy'y - y^2 = 0$$

Il vient alors :

$$2xy' - y = 0 \Leftrightarrow 2xy'y - y^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(y^2\right)' - y^2 = 0$$

On reconnaît dans la différence $x\left(y^2\right)'-y^2$ le numérateur de la dérivée de : $\dfrac{y^2}{x}$.

Pour x non nul (on cherche donc des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$), on a alors :

$$x\left(y^2\right)' - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow y^2 = kx$$

En choisissant la constante k non nulle (rappelons que y est non nul) et du signe de x (x gardant un signe constant sur l'un ou l'autre des deux intervalles où l'on travaille), il vient :

$$y = \pm\sqrt{kx} = \pm\sqrt{|kx|} = \pm\sqrt{|k|}\sqrt{|x|} = C\sqrt{|x|}$$

Lorsque k est choisie dans $\mathbb{R}^*$, $\pm\sqrt{|k|}$ prend n'importe quelle valeur réelle non nulle.

Une fonction de la forme $x \mapsto C\sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0 : les solutions de l'équation différentielle $2xy' - y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ et de la forme :

$$x \mapsto C\sqrt{|x|}$$

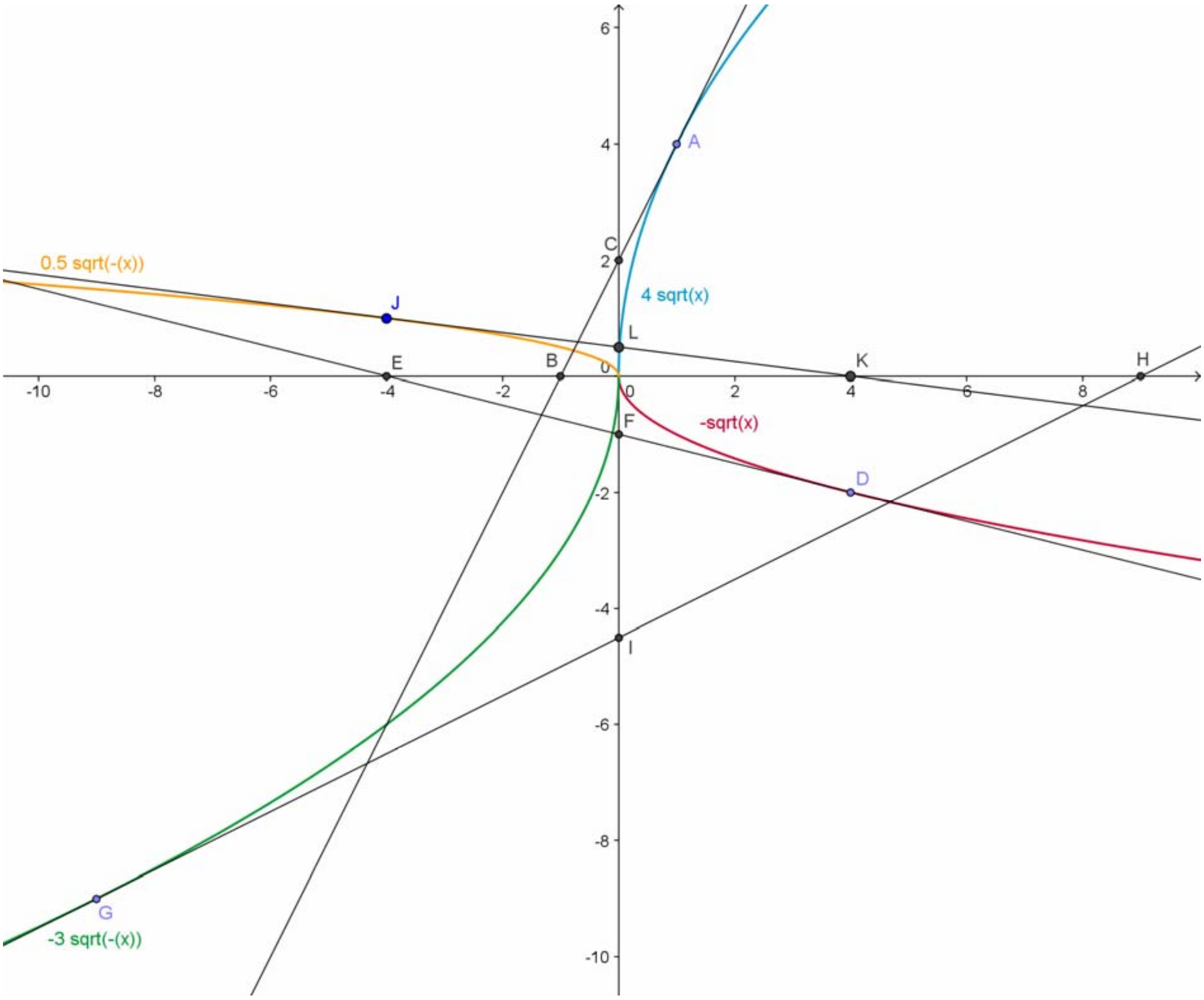
où C est une constante réelle non nulle.

A titre de complément, nous avons fourni ci-après les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- $x \mapsto 4\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \mapsto -\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \mapsto -3\sqrt{|x|}$ sur $\mathbb{R}_-^*$;
- $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{|x|}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Pour chacune d'elle, nous avons considéré :

- un point quelconque (le point « M ») : A, D, G et J respectivement ;
- Le point « T » correspondant : B, E, H et K ;
- Le milieu du segment [MT] : C, F, I et L. Ces quatre points sont bien situés sur l'axe des ordonnées.


0.5 sqrt(-(x))
4 sqrt(x)
-sqrt(x)
-3 sqrt(-(x))
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L