Fonction exponentielle.

Corrigés d'exercices

Version du 31/12/2013

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°4 page 123

a. **VRAI**

On a : $\left(\frac{1}{e^x}\right)^3 = \frac{1^3}{\left(e^x\right)^3} = \frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$.

b. **VRAI**

On a : $\frac{\left(e^x\right)^2}{e} = \frac{e^{2x}}{e^1} = e^{2x-1}$.

c. **VRAI**

On a : $e^{x-1} \times e^{1-x} = e^{x-1+(1-x)} = e^{x-1+1-x} = e^0 = 1$.

d. **FAUX**

On a : $\frac{e^{3x}}{e^x} = e^{3x-x} = e^{2x}$.

N°8 page 125

On a : $f(x) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$.

a. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On a donc : $x < 0 \Leftrightarrow \exp(x) < \exp(0) \Leftrightarrow \exp(x) < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$.
Ainsi, pour tout réel *x* strictement négatif, le numérateur de $f(x)$ est strictement négatif.
Comme son dénominateur est strictement positif pour tout *x* réel, on a finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) < 0}$$

b. En utilisant encore la croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a cette fois : $x \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geq \exp(0) \Leftrightarrow \exp(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$.
Ainsi, pour tout réel *x* positif, on a $f(x) \geq 0$.

Par ailleurs, on a $e^x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^x} < 1 \Leftrightarrow f(x) < 1$.
Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(x) < 1}$$

N°12 page 127

a. La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.
Pour tout *x* réel, on a : $f'(x) = -3 \times e^{-3x}$.
Comme on a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-3x} > 0$, il vient immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$ et on en conclut :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto e^{-3x} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

b. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$, opposée de la fonction inverse, est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet, sur chacun de ces intervalles, pour fonction dérivée : $x \mapsto -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$.
Pour tout réel *x* non nul, on a : $\frac{1}{x^2} > 0$, $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ et, finalement : $f'(x) > 0$.

Ainsi :

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. L'énoncé est erroné et nous considérons en fait ici la fonction :

$$f : x \mapsto e^{\cos x}$$

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Elle l'est à fortiori sur l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$ et pour tout *x* réel dans $\left[0\,;\pi\right]$, on a :

$$f'(x) = -\sin x \times e^{\cos x}$$

Pour tout *x* réel, on a $e^{\cos x} > 0$ et pour tout *x* réel de l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$, on a $\sin x \geq 0$.
On en déduit que l'on a $f'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$ et que la fonction *f* y est donc décroissante. Plus précisément, la dérivée ne s'annulant que pour deux valeurs de *x* (0 et π), on peut même conclure :

La fonction $x \mapsto e^{\cos x}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$.

N°30 page 134

a. $\dfrac{\left(e^2\right)^5}{e^9} = \dfrac{e^{2\times 5}}{e^9} = \dfrac{e^{10}}{e^9} = e^{10-9} = e^1 = \boxed{e}$

b. $\sqrt{e^2} \times \dfrac{1}{e^{-2}} = e \times e^2 = e^{1+2} = \boxed{e^3}$

c. $\dfrac{1}{1+e} - \dfrac{e^{-1}}{1+e^{-1}} = \dfrac{1}{1+e} - \dfrac{\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e}} = \dfrac{1}{1+e} - \dfrac{1}{e\left(1+\frac{1}{e}\right)} = \dfrac{1}{1+e} - \dfrac{1}{e+1} = \boxed{0}$

N°31 page 134

a. On ne se précipite pas ! On remarque d'abord que l'on a affaire à une différence de deux carrés …

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\
&= \left(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}\right) \\
&= 2e^x \times 2e^{-x} \\
&= \boxed{4}
\end{aligned}
$$

b. On a par exemple :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1+e^{2x}}{1-e^x} + \frac{e^{-x}+e^x}{1-e^{-x}} = \frac{1+e^{2x}}{1-e^x} + \frac{\frac{1}{e^x}+e^x}{1-\frac{1}{e^x}} \\
&= \frac{1+e^{2x}}{1-e^x} + \frac{\frac{1+e^x \times e^x}{e^x}}{\frac{e^x-1}{e^x}} = \frac{1+e^{2x}}{1-e^x} + \frac{1+e^{2x}}{e^x-1} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
$$

c. Ici, nous n'avons pas trop le choix et développons :

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \left(e^x + 1\right)^2 - \sqrt{e^{4x}} - 1 \\
&= \left(e^x\right)^2 + 2e^x \cancel{+1} - e^{2x} \cancel{-1} \\
&= e^{2x} + 2e^x - e^{2x} \\
&= \boxed{2e^x}
\end{aligned}
$$

N°38 page 135

1. On a affaire à la composée de deux fonctions et il vient :

$$
\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\
\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty
\end{array}\right\} \overset{\text{composition}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2} = +\infty
$$

$$
\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{x^2} = +\infty}
$$

2. On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-1\right)=+\infty$.

On a donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Classiquement, nous factorisons :

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}=\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$$

En tenant compte de $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}=0$ puis :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)=1+0=1\end{array}\right\}\overset{\div}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1}$$

c. On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{X\to0} e^{X}=e^{0}=1\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}}=1}$$

d. On a immédiatement $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+1\right)=+\infty$.

Il vient alors :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+1\right)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0^{+}\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{x}}=0^{+}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}=0^+}$$

N°44 page 136

1. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n=e^{1-n}=\frac{e^1}{e^n}=e\times\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

On en déduit ainsi :

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{e}$ et de premier terme $u_0=e$.

2. Comme $\frac{1}{e}\in\left]-1\,;+1\right[$, on en déduit immédiatement :

La suite (u_n) est convergente de limite nulle.

3. S_n correspond à la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n). Celle-ci étant géométrique, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}S_n&=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\\&=e\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}=e\frac{1-\frac{1}{e^{n+1}}}{\frac{e-1}{e}}\\&=e^2\frac{1-e^{-n-1}}{e-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\frac{e^2}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)}$$

Comme $\frac{1}{e} \in]-1\,;+1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n-1} = 0$.

Il vient alors : $\lim_{n\to+\infty} \left(1-e^{-n-1}\right) = 1-0 = 1$ et enfin (produit) :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{e^2}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)\right] = \frac{e^2}{e-1} \times 1 = \frac{e^2}{e-1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e^2}{e-1}}$$

N°50 page 137

1. Première méthode

On a : $\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times e^x}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times e^x}{x} = \sqrt{x}\times\frac{e^x}{x}$.

Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Il vient donc finalement (produit) : $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\times\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$.

2. Deuxième méthode

Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $x-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) \geq 0$.

On en déduit $x \geq \sqrt{x}$ puis : $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et enfin, la fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives : $\frac{e^x}{x} \leq \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, il vient alors (comparaison) : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Les deux méthodes nous conduisent à :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty}$$

N°52 page 137

1. On sait que l'exponentielle croît beaucoup plus vite que tout puissance. On est donc « naturellement » conduit à factoriser par « e^{2x} ».

   Pour tout réel *x*, on a :

$$\frac{e^{2x}-x^2}{e^{2x}+x^2}=\frac{e^{2x}\left(1-\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}=\frac{1-\frac{x^2}{\left(e^x\right)^2}}{1+\frac{x^2}{e^{2x}}}=\frac{1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{e^x}\right)^2}$$

   Comme on a (croissances comparées) : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, il vient : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ puis (composition) : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)^2=0^2=0$. D'où :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\left[1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^2\right]=1-0=1\\ \lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{x}{e^x}\right)^2\right]=1+0=1\end{array}\right\}\overset{\div}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{e^x}\right)^2}=1$$

   Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-x^2}{e^{2x}+x^2}=1}$$

2. On a $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et (composition) $\lim_{x\to+\infty}e^{3x}=+\infty$.
   Nous avons donc affaire ici à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ». L'exponentielle croissant beaucoup plus vite que la racine carrée, nous factorisons. Pour tout réel *x*, on a :

$$e^{3x}-\sqrt{x}=e^{3x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{e^{3x}}\right)$$

   A partir de là, nous pouvons procéder de diverses façons.

   On peut utiliser le résultat de l'exercice 50 (voir ci-dessus).

   On peut aussi procéder comme suit :

$$\frac{\sqrt{x}}{e^{3x}}=\frac{x}{\sqrt{x}\,e^{2x}e^x}=\frac{1}{\sqrt{x}\,e^{2x}}\times\frac{x}{e^x}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(e^x\right)^2}\times\frac{x}{e^x}$$

On a $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. On a aussi $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et donc (composition) : $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\right)^2=+\infty$.

D'où (produit) : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\,e^{2x}\right)=+\infty$ et (rapport) : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}\,e^{2x}}=0$.

Par ailleurs, on a (croissances comparées) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et donc : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

On déduit de ce qui précède (produit) : $\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(e^x\right)^2}\times\dfrac{x}{e^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{e^{3x}}=0$.

Il vient alors (somme) : $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{e^{3x}}\right)=1-0=1$ et enfin (produit) :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[e^{3x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{e^{3x}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-\sqrt{x}\right)=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-\sqrt{x}\right)=+\infty}$$

3. On a $e^x-x^2-x=e^x-\left(x^2+x\right)$. Or : $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)=+\infty$.

Nous avons encore une fois affaire à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».
L'exponentielle croissant plus vite que toute puissance, nous factorisons :

$$e^x-x^2-x=e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right)$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ (croissances comparées), on a immédiatement : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

Pour déterminer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$, on peut se reporter au résultat général obtenu à l'exercice 47.

Nous redétaillons ici la démarche.

On a : $\dfrac{x^2}{e^x}=\dfrac{x^2}{e^{2\frac{x}{2}}}=\dfrac{4\dfrac{x^2}{4}}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}=\dfrac{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}=4\left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2$.

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}=0\\ \\ \lim\limits_{t\to 0}t^2=0\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2=0$$

Ainsi, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2=4\times 0=0$.

On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ puis (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}\right)=1-0-0=1$.

Finalement (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}\right)\right]=+\infty$.

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2-x\right)=+\infty}$$

N°64 page 141

Partie A

1. La fonction g est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction exponentielle et la fonction affine $x\mapsto -x-1$). Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on a :

$$g'(x)=e^x-1$$

Comme $e^0=1$ et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il vient immédiatement :

- Si $x\in\left]-\infty\,;0\right[$, $e^x<1$ et donc $g'(x)<0$.
- $g'(0)=0$.
- Si $x\in\left]0\,;+\infty\right[$, $e^x>1$ et donc $g'(x)>0$.

On en déduit alors :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

D'après ce qui précède, la fonction g admet un minimum pour $x=0$. Ce minimum vaut : $g(0)=e^0-0-1=1-1=0$.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pour tout x réel, on a $g(x) \geq 0$ et g ne s'annule que pour $x = 0$.

2. D'après la question précédente, on a : $g(x) \geq 0$, soit $e^x - x - 1 \geq 0$.
   D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \geq 1$. Comme $1 > 0$, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0$.

Pour tout x réel, la différence $e^x - x$ est strictement positive.

Remarque : ce résultat nous permet d'affirmer que le dénominateur de $f(x)$ ne s'annule pas et, de fait, que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. a. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. On en déduit immédiatement : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x - x\right) = +\infty$ et c'est le terme « $-x$ » qui « donne » cette limite infinie. On va donc factoriser par « x ».
   Pour tout x réel non nul, on a : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x} = \dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$.

   Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, il vient (produit) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$.
   D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = 0 - 1 = -1$ et enfin : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.
   Finalement :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

On a cette fois : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et la fonction exponentielle croissant plus vite que la fonction identité, on factorise par « e^x » au dénominateur.
Pour tout x réel, on a : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x} = \dfrac{x}{e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{e^x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées), il vient immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

puis : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right) = 1 - 0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{e^x}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Finalement (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{e^x}} \right) = 0 \times 1 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

b. D'après les résultats obtenus à la question précédente, on peut affirmer :

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction *f* admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2. La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme rapport, défini sur $\mathbb{R}$, de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout *x* réel, on a :

$$f'(x) = \frac{1\times(e^x - x) - x\times(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x \cancel{-x} - x\times e^x \cancel{+x}}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$ (carré non nul), le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - x$. On en déduit immédiatement :

- Si $x \in]-\infty\,;1[$, on a $1 - x > 0$ et donc $f'(x) > 0$.
- $f'(1) = 0$.
- Si $x \in]1\,;+\infty[$, on a $1 - x < 0$ et donc $f'(x) < 0$.

Ainsi :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que la fonction f admet un maximum (global) pour $x=1$. Ce maximum vaut : $f(1)=\frac{1}{e^1-1}=\frac{1}{e-1}$.

Forts des éléments précédents, nous pouvons finalement dresser le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

3. On a immédiatement :

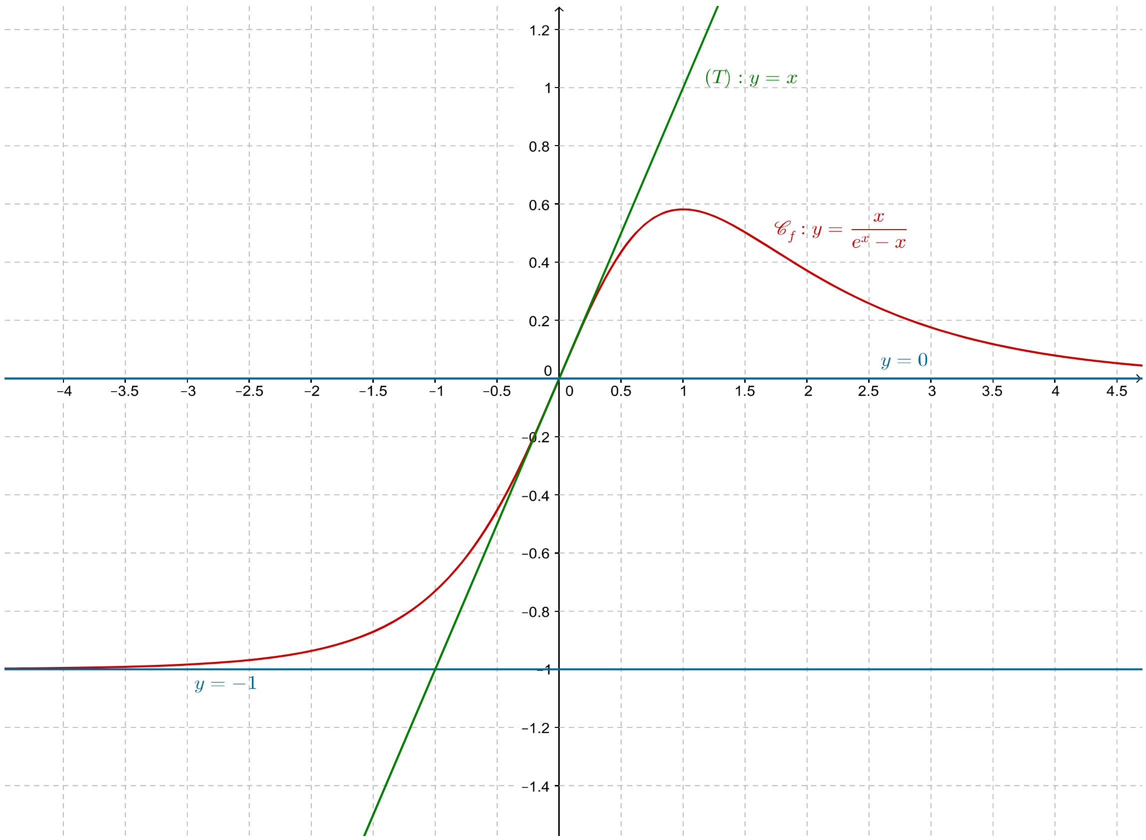
$$y=f'(0)\times(x-0)+f(0)=f'(0)\times x+f(0).$$

On a : $f(0)=\frac{0}{e^0-0}=0$ et $f'(0)=\frac{e^0\times(1-0)}{\left(e^0-0\right)^2}=\frac{1\times 1}{1^2}=1$.

Ainsi :

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y=x$.

4. A l'aide de Geogebra, on obtient :



N°71 page 143

Partie A

1. On a immédiatement : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$.

   Il vient alors :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 1}$$

2. Pour tout x réel strictement positif, on a :

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}$$

Comme on a (croissance comparée) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, il vient immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

Par ailleurs, de $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, on tire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ puis (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=1-0=1$ et enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=1$.

Finalement (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\right)=0\times1=0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

Partie B

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=1+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^1+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2+\ldots+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$$

On a ainsi une somme de la forme $1+q+q^2+\ldots+q^N$ avec $q=e^{\frac{1}{n}}\neq1$ et $N=n-1$. Une telle somme s'écrit plus simplement : $\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ soit ici :

$$\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1+1}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e^{\frac{1}{n}\times n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

On a bien :

$$\boxed{1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}}$$

2. En utilisant le résultat de la question précédente, il vient :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\times\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} = (e-1)\times\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = (e-1)\times f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = (e-1)\times f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1\end{array}\right\}\overset{\text{composition}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(e-1)\times f\left(\frac{1}{n}\right)\right] = (e-1)\times\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = (e-1)\times 1 = e-1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e-1}$$