
La fonction exponentielle de base a

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 157 : N°48, 49, 54, 56

Page 162 : N°107, 109

Page 163 : N°114

Page 164 : N°120

Page 165 : N°127

N°48 page 157

$$f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$$

1. Pour tout x non nul, on a : $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln 3}$.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln 3}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* (fonction proportionnelle à la fonction inverse). La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} .
Finalement, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

Nous dérivons alors f en tant que composée et il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{\ln 3}{x^2} \times e^{\frac{1}{x} \ln 3} = -\frac{\ln 3}{x^2} \times 3^{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{\ln 3}{x^2} \times 3^{\frac{1}{x}}}$$

2. Comme : $3 > 1$, on a : $\ln 3 > 0$. Or, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-\frac{1}{x^2} < 0$ et $3^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln 3} > 0$.

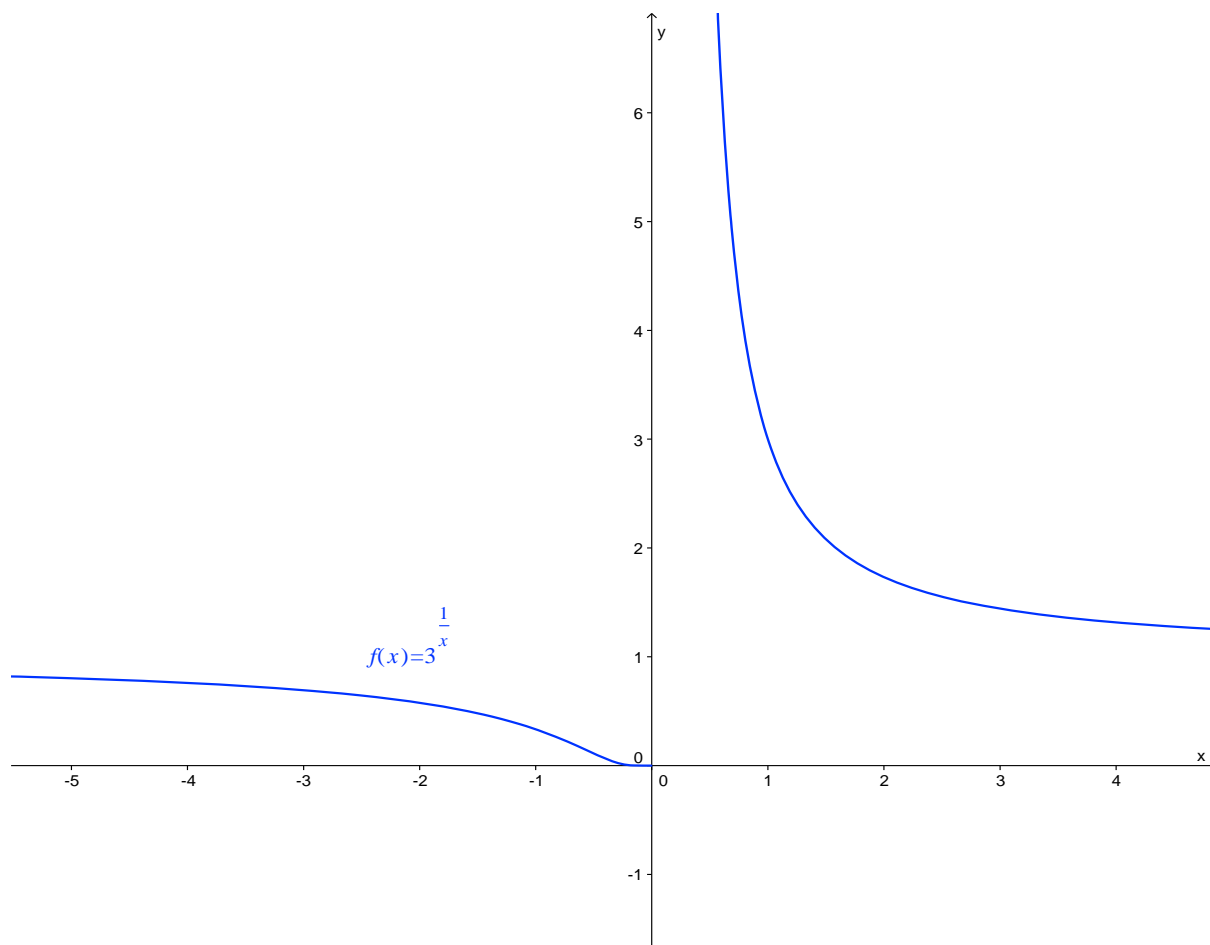
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) < 0$.

En définitive :

La fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

La fonction exponentielle de base a

Corrections d'exercices



Courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 3^{-x}$.

N°49 page 157

Pour tout réel a strictement positif, on a (cf. le cours) :

- Si $a \in]0;1[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$;
- Si $a > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

On a :

- $0,99 < 1$;
- $3 < \pi$ alors $\frac{\pi}{3} > 1$;
- $2 > 1$ alors $\sqrt{2} > 1$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Il vient alors :

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,99^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = 0 \end{array}$$

N°54 page 157

$$f(x) = \frac{3^x - 1}{x}$$

1. On a :

$$f(x) = \frac{3^x - 1}{x} = \frac{3^x - 3^0}{x - 0}$$

On en déduit :

$f(x)$ correspond au taux de variation de la fonction $g : x \mapsto 3^x$ entre 0 et x .

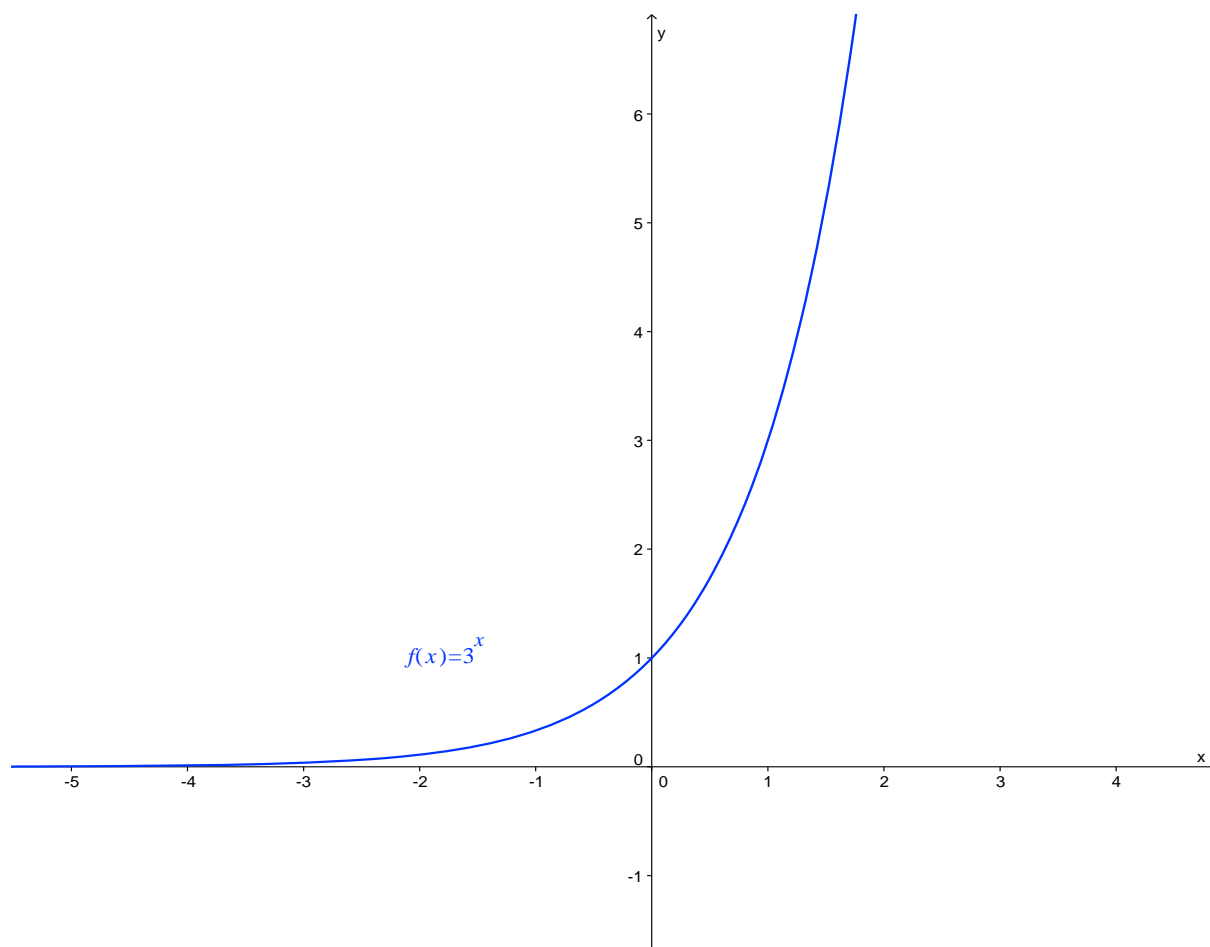
2. On déduit de ce qui précède, la fonction g , exponentielle de base 3 étant dérivable en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^0}{x - 0} = g'(0) = \ln 3 \times 3^0 = \ln 3$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 3}$$

La fonction exponentielle de base a

Corrections d'exercices



Courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 3^x$.

N°56 page 157

1. a) Pour tout x réel, on a :

$$f(-x) = a^{-x} = e^{-x \ln a} = e^{x(-\ln a)} = e^{x \ln \frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = g(x)$$

On a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x)}$$

b) Notons \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives dans un repère orthonormal des fonction f et g respectivement. D'après la question précédente, on a :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_g \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow y = f(-x) \Leftrightarrow P(-x; y) \in \mathcal{C}_f$$

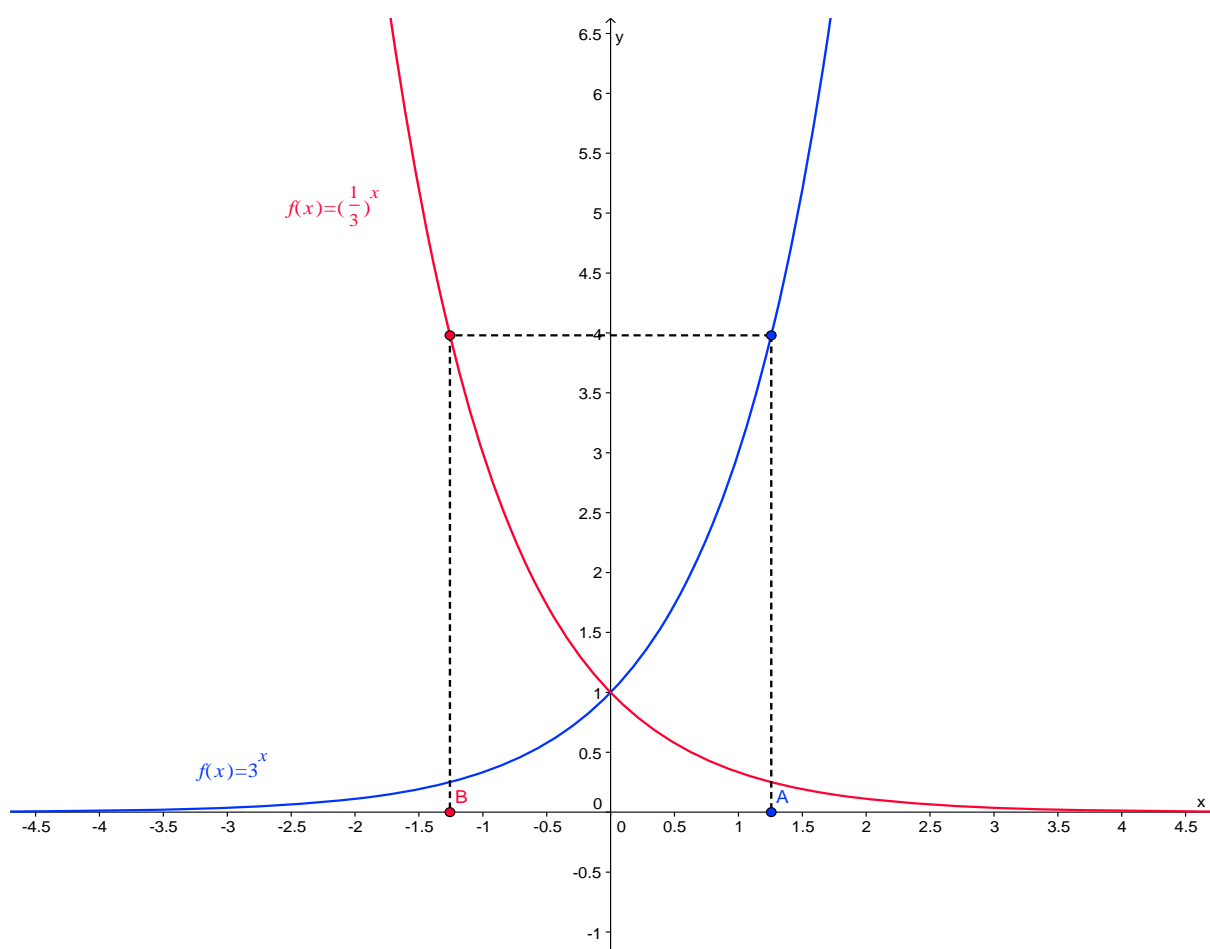
La fonction exponentielle de base a

Corrections d'exercices

On en tire immédiatement que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées :

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions f et g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

2. On a d'abord tracé ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f : x \mapsto 3^x$. On a ensuite obtenu \mathcal{C}_g en déterminant la courbe symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe des ordonnées.



N°107 page 162

1. On a :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} X - 4Y = -3 \\ 3X + 5Y = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4Y - 3 \\ 3X + 5Y = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4Y - 3 \\ 3(4Y - 3) + 5Y = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4Y - 3 \\ 17Y - 9 = \frac{49}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4Y - 3 \\ 17Y = 9 + \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4Y - 3 \\ 17Y = \frac{36 + 49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4Y - 3 \\ 17Y = \frac{85}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4Y - 3 \\ Y = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \times \frac{5}{4} - 3 \\ Y = \frac{5}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ Y = \frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système $\begin{cases} X - 4Y = -3 \\ 3X + 5Y = \frac{49}{4} \end{cases}$ admet pour unique solution le couple $\left(2; \frac{5}{4}\right)$.

2. a) En effectuant le changement de variable $\begin{cases} X = 3^x \\ Y = 4^y \end{cases}$ et en tenant compte du résultat obtenu à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3^x - 4^{y+1} = -3 \\ 3^{x+1} + 5.4^y = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 4.4^y = -3 \\ 3.3^x + 5.4^y = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X - 4Y = -3 \\ 3X + 5Y = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (X; Y) = \left(2; \frac{5}{4}\right) \\ & \Leftrightarrow (3^x; 4^y) = \left(2; \frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 2 \\ 4^y = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ y = \frac{\ln \frac{5}{4}}{\ln 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ y = \frac{\ln 5 - \ln 4}{\ln 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ y = \frac{\ln 5}{\ln 4} - 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}; \frac{\ln 5}{\ln 4} - 1\right) \end{aligned}$$

Le système $\begin{cases} 3^x - 4^{y+1} = -3 \\ 3^{x+1} + 5.4^y = \frac{49}{4} \end{cases}$ admet pour unique solution le couple $\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}; \frac{\ln 5}{\ln 4} - 1\right)$.

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

b) On effectue cette fois le changement de variable $\begin{cases} X = \sqrt[3]{x} \\ Y = \sqrt[3]{y} \end{cases}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ \sqrt[3]{27x} + \sqrt[3]{125y} = \frac{49}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{125}\sqrt[3]{y} = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{y} = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (X; Y) = \left(2; \frac{5}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x}; \sqrt[3]{y}) = \left(2; \frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{y} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^3 \\ y = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = \frac{125}{64} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x; y) = \left(8; \frac{125}{64}\right) \end{aligned}$$

Le système $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ \sqrt[3]{27x} + \sqrt[3]{125y} = \frac{49}{4} \end{cases}$ admet pour unique solution le couple $\left(8; \frac{125}{64}\right)$.

N°109 page 162

1. $X = 2^{\frac{3}{2x}}$ donne : $X^2 = \left(2^{\frac{3}{2x}}\right)^2 = 2^{\frac{3}{2x} \times 2} = 2^{\frac{3}{x}}$ et $X^3 = \left(2^{\frac{3}{2x}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2x} \times 3} = 2^{\frac{9}{2x}}$.

On en tire alors :

$$2 \cdot 2^{\frac{9}{2x}} - 3 \cdot 2^{\frac{3}{x}} - 14 \cdot 2^{\frac{3}{2x}} + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2^{\frac{3}{2x}} \\ 2X^3 - 3X^2 - 14X + 15 = 0 \end{cases}$$

On doit donc résoudre :

$2X^3 - 3X^2 - 14X + 15 = 0$

2. On pose : $P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 14X + 15$.

a) On a : $P(1) = 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 14 \times 1 + 15 = 2 - 3 - 14 + 15 = 17 - 17 = 0$

$P(1) = 0$

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

b) Puisque 1 est racine du polynôme P , on peut factoriser par $X - 1$:

$$P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 14X + 15 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

En développant l'expression factorisée, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - 1)(aX^2 + bX + c) \\ &= aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c \\ &= aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c \end{aligned}$$

On identifie cette expression à $2X^3 - 3X^2 - 14X + 15$ et on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = -14 \\ -c = 15 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = -14 \\ -c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a - 3 \\ c = b - 14 \\ -c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 - 3 \\ c = b - 14 \\ -c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 - 14 \\ -c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -15 \end{cases}$$

Finalemment :

$$\boxed{P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 14X + 15 = (X - 1)(2X^2 - X - 15)}$$

c) On va maintenant résoudre : $2X^2 - X - 15 = 0$.

Le discriminant associé s'écrit : $(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-15) = 1 + 120 = 121 = 11^2$. D'où les deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{-(-1) - 11}{2 \times 2} = \frac{1 - 11}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-(-1) + 11}{2 \times 2} = \frac{1 + 11}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

En définitive :

Le polynôme P admet pour racines : $-\frac{5}{2}$, 1 et 3.

La fonction exponentielle de base a

Corrections d'exercices

3. Comme on a effectué le changement de variable $X = 2^{\frac{3}{2x}}$, on a : $X > 0$. On ne retient donc pas la racine $-\frac{5}{2}$ et on résout les équations : $2^{\frac{3}{2x}} = 1$ et $2^{\frac{3}{2x}} = 3$.

L'équation $2^t = 1$ admet comme unique solution $t = 0$. On en déduit immédiatement que l'équation $2^{\frac{3}{2x}} = 1$ n'admet pas de solution puisque $\frac{3}{2x}$ ne peut être nul.

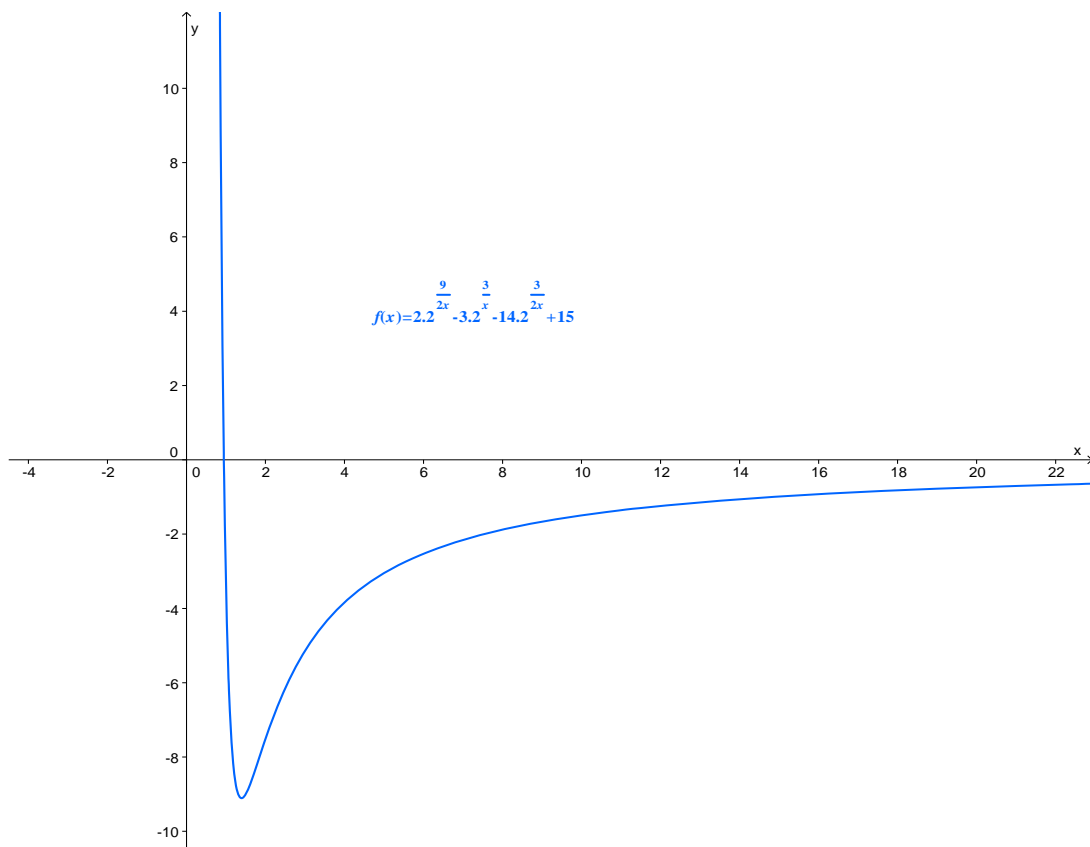
L'équation $2^t = 3$ donne : $t \ln 2 = \ln 3$, soit $t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 0,946$.

On a donc : $2^{\frac{3}{2x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2x} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \ln 2}{2 \ln 3}$.

Finalemment :

L'équation $2.2^{\frac{9}{2x}} - 3.2^{\frac{3}{x}} - 14.2^{\frac{3}{2x}} + 15 = 0$ admet comme unique solution : $\frac{3 \ln 2}{2 \ln 3}$.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2.2^{\frac{9}{2x}} - 3.2^{\frac{3}{x}} - 14.2^{\frac{3}{2x}} + 15$.



N°114 page 163

$$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1}$$

1. Pour tout réel x non nul, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{5^{-x}}{5^{-2x} - 1} = \frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}} - 1} = \frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1 - 5^{2x}}{5^{2x}}} = \frac{1}{5^x} \times \frac{5^{2x}}{1 - 5^{2x}} \\ &= -\frac{5^{2x}}{5^x(5^{2x} - 1)} = -\frac{5^{2x-x}}{5^{2x} - 1} = -\frac{5^x}{5^{2x} - 1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = -f(x)$$

Pour tout réel x non nul, $-x$ appartient au domaine de définition de f (les fonctions $x \mapsto 5^x$ et $x \mapsto 5^{2x}$ sont définies sur \mathbb{R} et $x = 0$ est la seule valeur interdite). Nous avons également l'égalité ci-dessus. On en déduit que la fonction f est impaire (l'intitulé de l'exercice se révèle être ainsi d'une originalité torride ...). Ainsi, on peut se contenter d'étudier la fonction f sur \mathbb{R}_+^* . C'est fondamentalement ce qui est fait ci-dessous ...

2. a) On a, en tenant compte des propriétés élémentaires de la fonction exponentielle de base a avec $a > 1$ (ici $a = 5$) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 5^x = 5^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (5^x - 1) = 0^+$$

On en déduit alors (rapport) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{5^x}{5^x - 1} = +\infty$$

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

b) Pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1} = \frac{1}{\frac{5^{2x} - 1}{5^x}} = \frac{1}{\frac{5^{2x}}{5^x} - \frac{1}{5^x}} = \frac{1}{5^x - 5^{-x}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{5^x - 5^{-x}}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = +\infty$ et donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^x} = 0$. On en tire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - 5^{-x}) = +\infty$ et, finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^x - 5^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3. a) On a, pour tout x réel : $5^x = e^{x \ln 5}$. La dérivée de la fonction $x \mapsto 5^x$ est donc (dérivée d'une composée. Cf. le cours) la fonction : $x \mapsto \ln 5 \times 5^x$.

On procède de façon analogue avec la fonction $x \mapsto 5^{2x}$ et on obtient cette fois, comme fonction dérivée, la fonction : $x \mapsto 2 \ln 5 \times 5^{2x}$.

On dérive alors f en tant que rapport de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln 5 \times 5^x \times (5^{2x} - 1) - 5^x \times 2 \ln 5 \times 5^{2x}}{(5^{2x} - 1)^2} \\ &= \frac{\ln 5 \times 5^x \times (5^{2x} - 1 - 2 \times 5^{2x})}{(5^{2x} - 1)^2} \\ &= \frac{\ln 5 \times 5^x \times (-1 - 5^{2x})}{(5^{2x} - 1)^2} \\ &= -\frac{\ln 5 \times 5^x \times (1 + 5^{2x})}{(5^{2x} - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{\ln 5 \times 5^x \times (1 + 5^{2x})}{(5^{2x} - 1)^2}$$

La fonction exponentielle de base a

Corrections d'exercices

b) Etudions le signe de l'expression précédente.

On a immédiatement, pour tout x réel : $\ln 5 > 0$ et $5^x > 0$. On en tire alors : $1 + 5^{2x} > 1 > 0$.
Le produit $\ln 5 \times 5^x \times (1 + 5^{2x})$ est donc strictement positif sur \mathbb{R} .

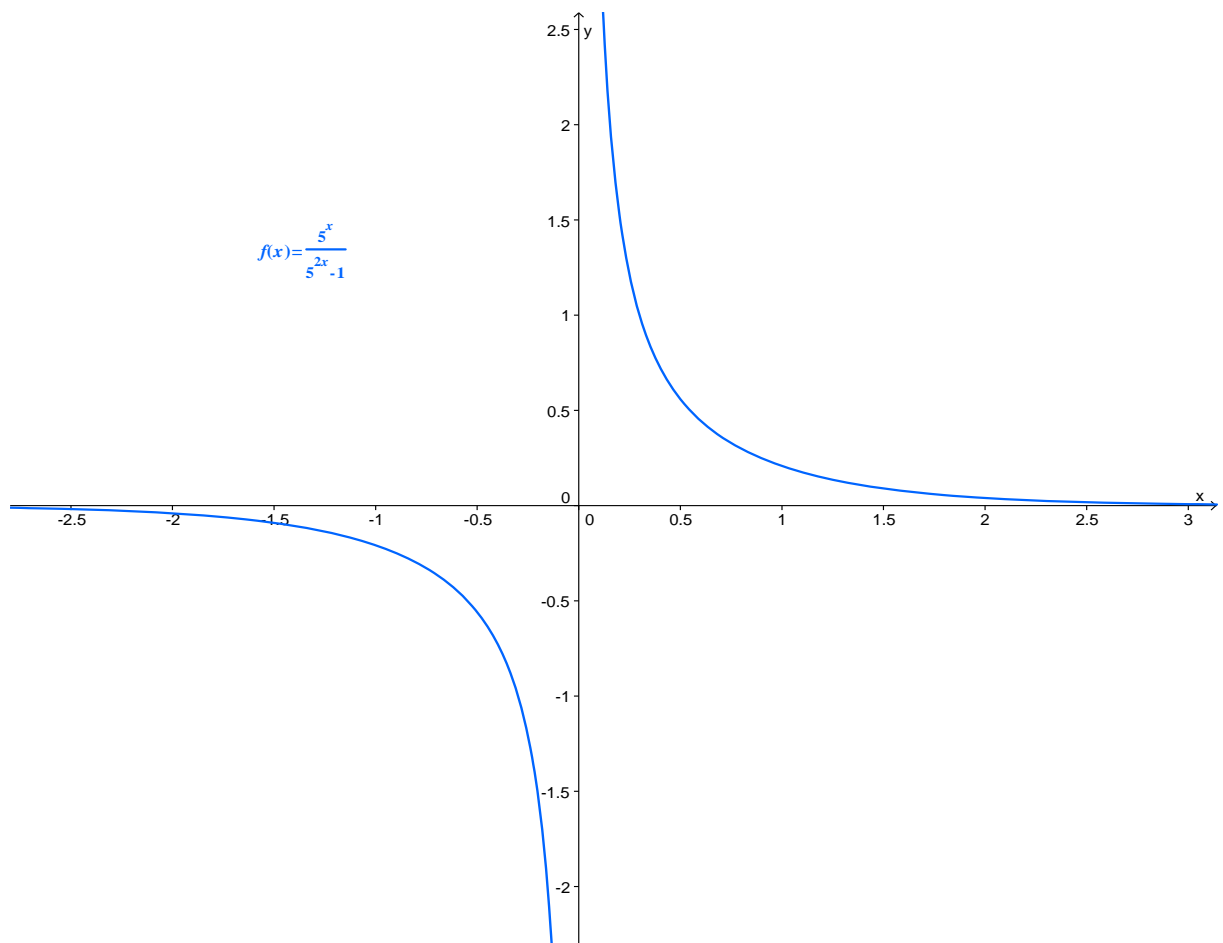
On a par ailleurs : $(5^{2x} - 1)^2 > 0$ sur \mathbb{R}^* car il s'agit d'un carré ne s'annulant pas sur cet ensemble.

On en déduit : $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R}^* et donc, à fortiori, sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement :

La fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

4. On obtient :



Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \frac{5^x}{5^{2x} - 1}$.

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

5. a) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5^x}{5^{2x} - 1} = \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 3 \times 5^x &= 2(5^{2x} - 1) \\ \Leftrightarrow 2 \times 5^{2x} - 3 \times 5^x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \times (5^x)^2 - 3 \times 5^x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} X = 5^x \\ 2X^2 - 3X - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Réolvons alors : $2X^2 - 3X - 2 = 0$.

Le discriminant associé vaut : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

On obtient alors les deux racines : $\frac{-(-3) - 5}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-(-3) + 5}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$.

Comme $X = 5^x > 0$, on ne retient que la seconde racine et on résout : $5^x = 2$ qui donne $x \ln 5 = \ln 2$ et, finalement : $x = \frac{\ln 2}{\ln 5}$.

L'équation $f(x) = \frac{2}{3}$ admet pour unique solution $x = \frac{\ln 2}{\ln 5}$.

b) En tenant compte du résultat précédent et du fait que la fonction f est impaire, on a :

$$f(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -f(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow f(-x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x = \frac{\ln 2}{\ln 5} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln 2}{\ln 5}$$

L'équation $f(x) = -\frac{2}{3}$ admet pour unique solution $x = -\frac{\ln 2}{\ln 5}$.

N°120 page 164

1. Pour tout réel x strictement positif, les fonctions f et g prennent des valeurs strictement positives et on a :

$$g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow 3^x \geq x^3 \Leftrightarrow \ln(3^x) \geq \ln(x^3) \Leftrightarrow x \ln 3 \geq 3 \ln x \Leftrightarrow x \ln 3 - 3 \ln x \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$$

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

2. a) La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout x strictement positif, on a :

$$h'(x) = 1 \times \ln 3 - \frac{3}{x} = \frac{x \ln 3 - 3}{x}$$

$$\text{On a alors : } h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x \ln 3 - 3}{x} > 0 \Leftrightarrow x \ln 3 - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{\ln 3} \text{ et}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{\ln 3}.$$

D'où :

- Pour tout x de l'intervalle $\left] 0; \frac{3}{\ln 3} \right[$, $f'(x) < 0$;
- $f'\left(\frac{3}{\ln 3}\right) = 0$;
- Pour tout x de l'intervalle $\left] \frac{3}{\ln 3}; +\infty \right[$, $f'(x) > 0$.

En définitive :

La fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $\left] 0; \frac{3}{\ln 3} \right[$
et strictement croissante sur l'intervalle $\left] \frac{3}{\ln 3}; +\infty \right[$.

b) On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln 3 = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3 \ln x = -\infty$ d'où (différence) : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty$.

$$\text{Par ailleurs : } h(x) = x \ln 3 - 3 \ln x = x \left(\ln 3 - 3 \frac{\ln x}{x} \right).$$

Par croissances comparées, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln 3 - 3 \frac{\ln x}{x} \right) = \ln 3 > 0$ et, de

fait : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

3. a) D'après la question 2. a), on peut affirmer que la fonction h admet un minimum global pour $x = \frac{3}{\ln 3}$. On a :

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

$$h\left(\frac{3}{\ln 3}\right) = \frac{3}{\ln 3} \times \ln 3 - 3 \times \ln\left(\frac{3}{\ln 3}\right) = 3\left[1 - \ln\left(\frac{3}{\ln 3}\right)\right] = 3\left[\ln e - \ln\left(\frac{3}{\ln 3}\right)\right] = 3 \ln \frac{e}{\frac{3}{\ln 3}}$$

A la calculatrice, on obtient : $\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}} \approx 0,995 < 1$.

Ceci dit, sans calculatrice, on peut comparer $\frac{3}{\ln 3}$ et e , plus précisément leurs inverses :

$\frac{\ln 3}{3} = \ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$ et $\frac{1}{e} = \ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$... Finalement, on peut étudier la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ (serait-ce une vraie suggestion de ma part ? ☺) et découvrir qu'elle admet un maximum pour ... ($x = e$).

On a donc : $\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}} < 1$ et donc $\ln \frac{e}{\frac{3}{\ln 3}} < 0$.

Finalement, le minimum global de la fonction h sur \mathbb{R}_+^* est $h\left(\frac{3}{\ln 3}\right) = 3 \ln \frac{e}{\frac{3}{\ln 3}} < 0$.

On a alors :

Sur l'intervalle $\left]0; \frac{3}{\ln 3}\right[$

- La fonction h est continue en tant que fonction dérivable ;
- Elle est strictement décroissante (cf. la question 2. a) ;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty$ et $h\left(\frac{3}{\ln 3}\right) = 3 \ln \frac{e}{\frac{3}{\ln 3}} < 0$ et $0 \in \left]h\left(\frac{3}{\ln 3}\right); +\infty\right[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h s'annule exactement une fois sur l'intervalle $\left]0; \frac{3}{\ln 3}\right[$.

Sur l'intervalle $\left]\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right[$

- La fonction h est continue en tant que fonction dérivable ;
- Elle est strictement croissante (cf. la question 2. a) ;
- $h\left(\frac{3}{\ln 3}\right) = 3 \ln \frac{e}{\frac{3}{\ln 3}} < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $0 \in \left]h\left(\frac{3}{\ln 3}\right); +\infty\right[$.

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h s'annule exactement une fois sur l'intervalle $\left] \frac{3}{\ln 3}; +\infty \right[$.

En définitive :

La fonction h s'annule deux fois sur \mathbb{R}_+^*

b) La symétrie des deux termes de l'expression de $h(x)$ nous conduit rapidement à la solution (évidente ?) entière : $x = 3$. Comme $\ln 3 > 1$, on a $\frac{3}{\ln 3} < 3$ et cette solution appartient donc à l'intervalle $\left] \frac{3}{\ln 3}; +\infty \right[$. L'autre solution, α , appartient donc à l'intervalle $\left] 0; \frac{3}{\ln 3} \right[$. Comme $h(1) = \ln 3 > 0$, on peut même affirmer : $\alpha \in \left] 1; \frac{3}{\ln 3} \right[$.

En tabulant alors avec un pas de 0,1 on obtient :

$$2,4 < \alpha < 2,5$$

Puis, avec un pas de 0,01 :

$$2,47 < \alpha < 2,48$$

Puis, avec un pas de 0,001 :

$$2,478 < \alpha < 2,479$$

A la calculatrice, on obtient : $h(2,4785) < 0$. On a donc : $2,478 < \alpha < 2,4785 < 2,479$ et, finalement :

$$\alpha \approx 2,478 \text{ à } 10^{-3}.$$

4. a) D'après les questions 2. a) et 3. a), on a immédiatement :

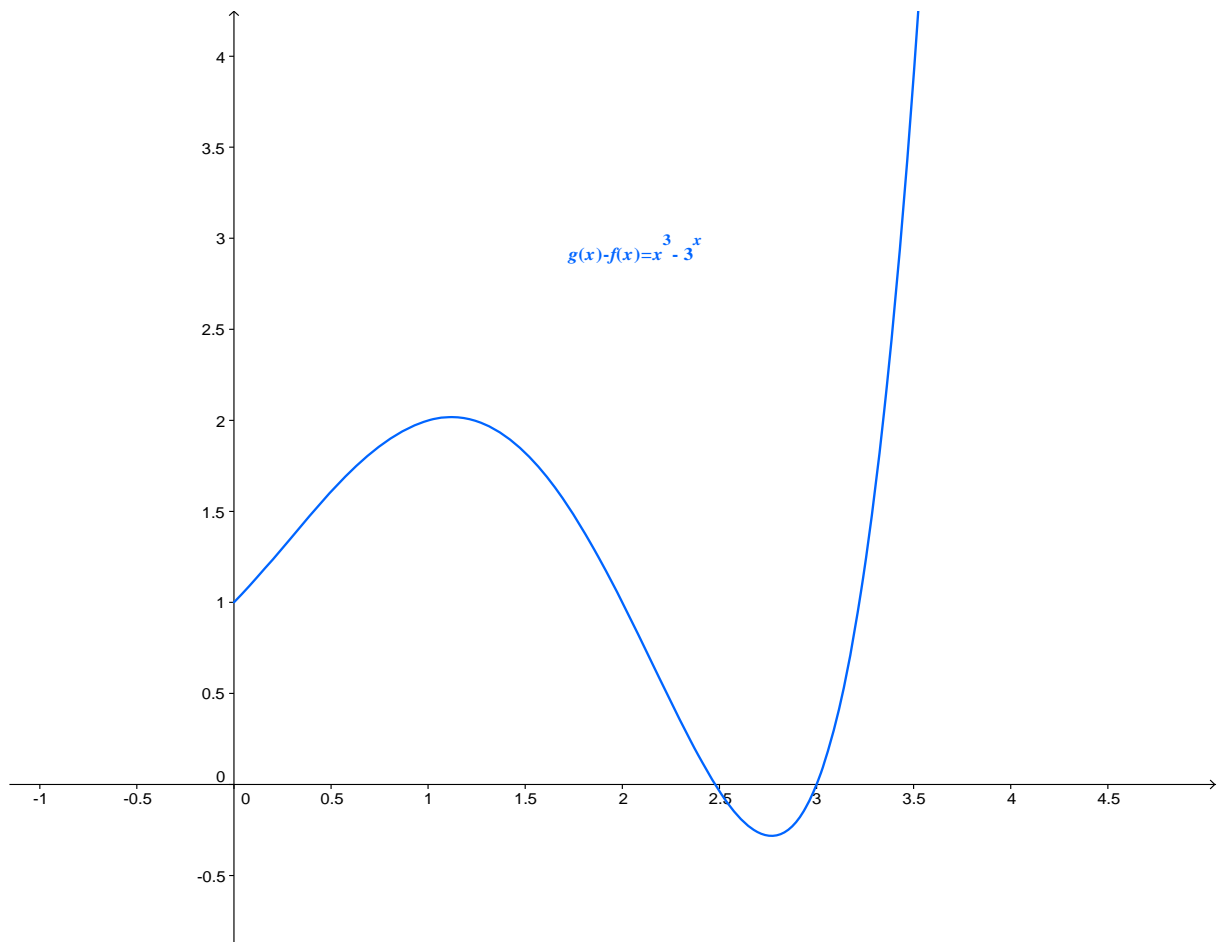
- Pour tout réel x de $\left] 0; \alpha \right[\cup \left] 3; +\infty \right[$, $h(x) > 0$;
- Pour tout réel x de $\left] \alpha; 3 \right[$, $h(x) < 0$;
- $h(\alpha) = h(3) = 0$.

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

b) D'après la question précédente et la question 1., on a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]0; \alpha[\cup]3; +\infty[$, $3^x > x^3$;
- Pour tout réel x de $]\alpha; 3[$, $3^x < x^3$;
- Pour $x = 3$ ou $x = \alpha$, $3^x = x^3$.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous l'allure de la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto 3^x - x^3$:



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto g(x) - f(x) = 3^x - x^3$

N°127 page 165

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad (\text{E})$$

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices

- a) Les deux membres de l'équation considérée sont strictement positifs et nous pouvons en considérer les logarithmes népériens :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\Leftrightarrow \ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln\left[(\sqrt{x})^x\right] \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = \frac{1}{2} x \ln x \\ &\Leftrightarrow \ln x \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0\end{aligned}$$

On a bien :

$$(E) \Leftrightarrow \ln x \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$$

- b) D'après la question précédente, il convient de résoudre : $\ln x \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$.

On a : $\ln x \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0$.

On a immédiatement : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. La vérification est immédiate.

Puis, en tenant compte du fait que l'on travaille sur \mathbb{R}_+^* :

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2}(2 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

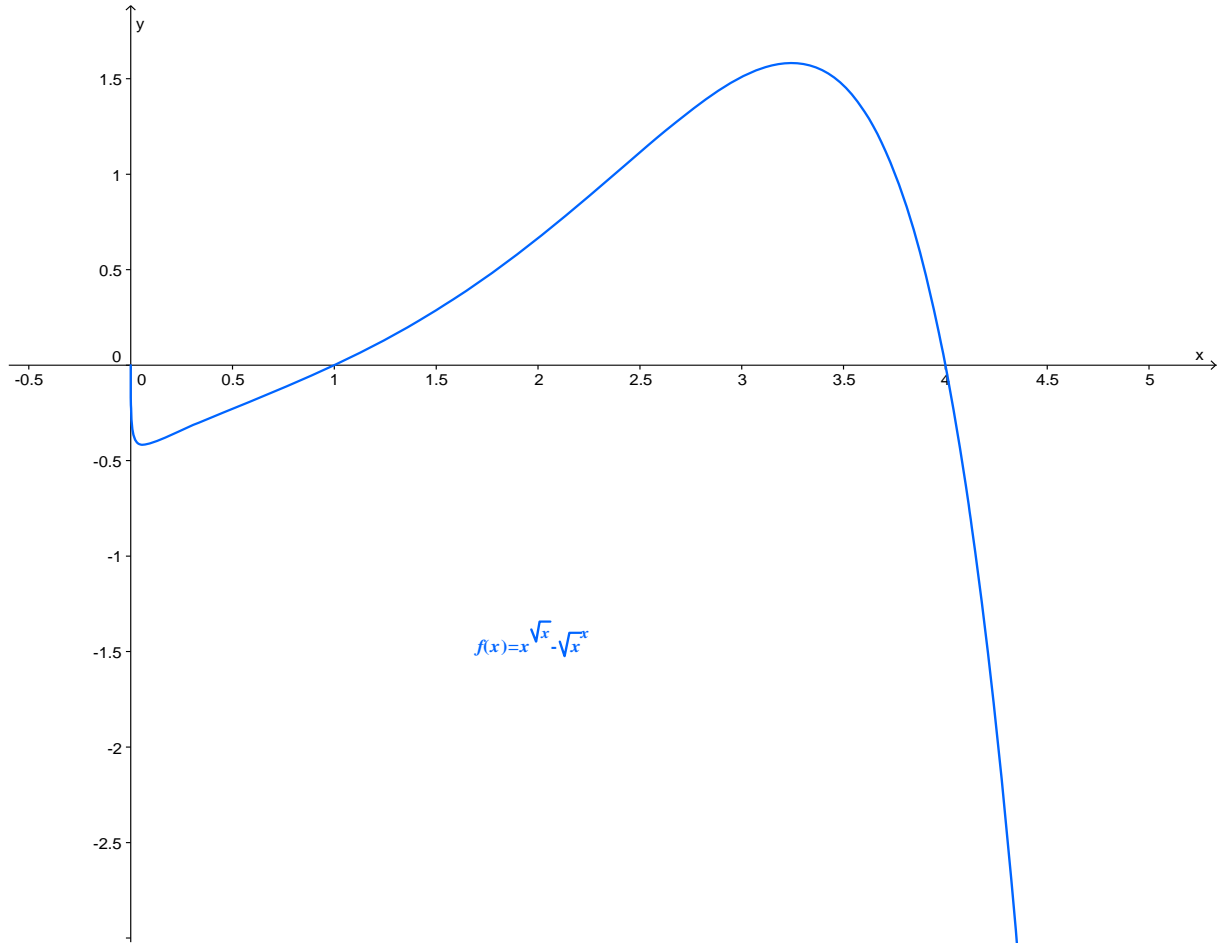
Vérification : $4^{\sqrt{4}} = 4^2 = 16$ et $\sqrt{4^4} = 2^4 = 16$.

En définitive :

L'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ admet deux solutions : 1 et 2.

A titre de complément, nous fournissons ci-après l'allure de la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par : $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} - (\sqrt{x})^x \dots$

La fonction exponentielle de base a
Corrections d'exercices



Courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} - (\sqrt{x})^x$