
Fonction logarithme népérien.

Corrigés d'exercices

Version du 11/03/2014

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 164 : N°21, 22, 24

Page 169 : N°65

Page 170 : N°72

Page 173 : N°86

Page 174 : N°90

Page 1 : N°

Page 1 : N°

Page 1 : N°

N°21 page 164

$$a = \ln(e^2) = \boxed{2} \text{ (en utilisant directement } \forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \text{).}$$

$$b = \ln(e^{-3}) = \boxed{-3} \text{ (idem).}$$

$$c = e^{\ln 5} = \boxed{5} \text{ (en utilisant directement } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x \text{).}$$

$$d = e^{-\ln 3} = \frac{1}{e^{\ln 3}} = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ (idem) ou } d = e^{-\ln 3} = e^{\ln \frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ (en utilisant d'abord}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -\ln x = \ln \frac{1}{x} \text{).}$$

$$e = e^{2 \ln 7} = (e^{\ln 7})^2 = 7^2 = \boxed{49} \text{ ou } e = e^{2 \ln 7} = e^{\ln 7^2} = e^{\ln 49} = \boxed{49}.$$

$$f = e^{-3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}} \text{ ou } f = e^{-3 \ln 2} = e^{\ln 2^{-3}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

N°22 page 164

a. $\ln x = 3$

On résout cette équation dans \mathbb{R}_+^* (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).

On a : $\ln x = 3 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^3 \Leftrightarrow x = e^3$ qui est strictement positif.

$$\mathcal{S} = \{e^3\}$$

b. $2 \ln x + 6 = 0$

On résout cette équation dans \mathbb{R}_+^* (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).

On a : $2 \ln x + 6 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-3} \Leftrightarrow x = e^{-3}$ qui est strictement positif.

$$\mathcal{S} = \{e^{-3}\}$$

c. $1 - 4 \ln x = \ln x - 9$

On résout cette équation dans \mathbb{R}_+^* (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).

On a : $1 - 4 \ln x = \ln x - 9 \Leftrightarrow 5 \ln x = 10 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^2 \Leftrightarrow x = e^2$ qui est strictement positif.

$$\mathcal{S} = \{e^2\}$$

d. $(\ln x)^2 = 1$

On résout cette équation dans \mathbb{R}_+^* (domaine de définition de la fonction logarithme népérien).

On a : $(\ln x)^2 = 1 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$ ou $\ln x + 1 = 0$.

On a alors :

- $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.
- $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{e}; e \right\}$$

N°24 page 164

a. $\ln(x+2) = \ln 2$

On doit avoir $x+2 > 0$, c'est-à-dire $x > -2$. On résout donc cette équation dans l'intervalle $]-2; +\infty[$.

Pour tout x strictement supérieur à -2 , on a : $\ln(x+2) = \ln 2 \Leftrightarrow x+2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$ qui appartient bien à l'intervalle $]-2; +\infty[$.

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

b. $\ln(2x-5) = 1$

On doit avoir $2x-5 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{5}{2}$. On résout donc cette équation dans

l'intervalle $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$.

Pour tout x strictement supérieur à $\frac{5}{2}$, on a :

$$\ln(2x-5) = 1 \Leftrightarrow \ln(2x-5) = \ln e \Leftrightarrow 2x-5 = e \Leftrightarrow x = \frac{e+5}{2} \text{ qui appartient bien à}$$

l'intervalle $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{e+5}{2} \right\}$$

c. $4\ln(1-x) = 8$

On doit avoir $1-x > 0$, c'est-à-dire $x < 1$. On résout donc cette équation dans l'intervalle $] -\infty; 1[$.

Pour tout x strictement inférieur à 1, on a :

$$4\ln(1-x) = 8 \Leftrightarrow \ln(1-x) = 2 \Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln e^2 \Leftrightarrow 1-x = e^2 \Leftrightarrow x = 1-e^2 \text{ qui appartient}$$

bien à l'intervalle $] -\infty; 1[$.

$$\mathcal{S} = \{1-e^2\}$$

d. $\ln(3x+8) = \ln x$

On doit avoir $3x+8 > 0$ et $x > 0$, c'est-à-dire $\begin{cases} 3x+8 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

$$\text{Or : } \begin{cases} 3x+8 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{8}{3} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

On résout donc cette équation dans l'intervalle \mathbb{R}_+^* .

Pour tout x strictement supérieur à 0, on a :

$$\ln(3x+8) = \ln x \Leftrightarrow 3x+8 = x \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4 \text{ qui n'est pas strictement positif.}$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

- a. Le premier terme de la suite (u_n) est strictement positif et sa raison est strictement supérieure à 1. On en conclut immédiatement que la suite (u_n) est (strictement) croissante.

On peut redétailler ...

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } u_n = u_0 \times q^n = \frac{4}{5} \times 1,2^n.$$

$$\text{Il vient donc : } u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} \times 1,2^{n+1} - \frac{4}{5} \times 1,2^n = \frac{4}{5} \times 1,2^n \times (1,2 - 1) = \frac{4}{5} \times 1,2^n \times 0,2 \text{ et on a}$$

$$\text{immédiatement : } \frac{4}{5} \times 1,2^n \times 0,2 > 0. \text{ D'où le résultat.}$$

La suite (u_n) est (strictement) croissante.

b. On a : $u_n \geq 100 \Leftrightarrow \frac{4}{5} \times 1,2^n \geq 100 \Leftrightarrow 1,2^n \geq 100 \times \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1,2^n \geq 125 \Leftrightarrow n \ln 1,2 \geq \ln 125.$

$$\text{Comme } 1,2 > 1, \text{ on a } \ln 1,2 > 0 \text{ d'où : } n \ln 1,2 \geq \ln 125 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 125}{\ln 1,2}.$$

$$\text{Comme } \frac{\ln 125}{\ln 1,2} \approx 26,5 \text{ on aura } u_n \geq 100 \text{ pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 27.$$

$u_n \geq 100$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 27.

N°72 page 170

On pose $X = \ln x$.

On a donc, en considérant les exponentielles : $e^x = e^{\ln x} = x$.

$$\text{Alors : } \frac{x}{(\ln x)^2} = \frac{e^x}{X^2} \text{ puis : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^2}.$$

On ne peut conclure directement, la limite classique : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$, pour tout n entier

naturel, n'étant officiellement plus au programme.

Classiquement, le dénominateur étant un carré, on fait apparaître un carré au numérateur :

$$\frac{e^X}{X^2} = \frac{e^{2 \times \frac{X}{2}}}{X^2} = \frac{\left(e^{\frac{X}{2}}\right)^2}{X^2} = \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{X}\right)^2 = \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{2 \times \frac{X}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}}\right)^2$$

On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{2} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ (croissance comparée)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}} = +\infty \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \alpha^2 = +\infty \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}} \right)^2 = +\infty \end{array}$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\frac{X}{2}} \right)^2 = +\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = +\infty$$

N°86 page 173

1. VRAI

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$f_n(1) = 1^n \times \ln(1+1) = 1 \times \ln 2 = \ln 2$$

On en déduit donc que pour tout entier naturel non nul n , le point $A(1; \ln 2)$ appartient à la courbe \mathcal{E}_n .

2. VRAI

On a d'abord : $u_1 = f_1(2) = 2^1 \times \ln(1+2) = 2 \ln 3.$

Puis : pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$u_n = f_n(2) = 2^n \times \ln 3 = 2 \ln 3 \times 2^{n-1} = u_1 \times 2^{n-1}$$

On en déduit immédiatement que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 2 \ln 3.$

3. VRAI

Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$f'_n(x) = n x^{n-1} \times \ln(x+1) + x^n \times \frac{1}{x+1}$$

$$D'où : f'_n(0) = n \times 0^{n-1} \times \underbrace{\ln(0+1)}_{=0} + \underbrace{0^n}_{=0} \times \frac{1}{0+1} = 0.$$

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est toujours nul : la tangente est horizontale.

4. FAUX

Pour tout entier naturel non nul n et tout x dans l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} \ln(x+1) - x^n \ln(x+1) = x^n \ln(x+1) \times (x-1)$$

- $x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0$.
- $x \geq 0 \Leftrightarrow 1+x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq 0$.
- $x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq 0$.

En définitive, pour tout x dans l'intervalle $[0; 1]$, on a : $x^n \ln(x+1) \times (x-1) \leq 0$, soit

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0.$$

N°90 page 174

1. Soit a un réel quelconque fixé.

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f_a(x) = (\ln x + a) \times \frac{1}{x}$$

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} a = a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{somme} \\ \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x + a) = -\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \text{produit} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[(\ln x + a) \times \frac{1}{x} \right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_a(x) = -\infty$$

On a aussi : $f_a(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{a}{x}$. D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{a}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0$$

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel strictement positif x , on a :

$$f_a'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x + a) \times 1}{x^2} = \frac{-\ln x - a + 1}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_a'(x) = \frac{-\ln x - a + 1}{x^2}$$

3. Comme $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$, le signe de $f_a'(x)$ est celui de $-\ln x - a + 1$.

On a : $-\ln x - a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -a + 1 \Leftrightarrow x \leq e^{-a+1}$.

On en déduit immédiatement :

- Pour tout réel x de $]0; e^{-a+1}]$, on a : $f_a'(x) \geq 0$ et la fonction f_a est croissante.
- Pour tout réel x de $[e^{-a+1}; +\infty[$, on a : $f_a'(x) \leq 0$ et la fonction f_a est décroissante.

On en déduit immédiatement que la fonction f_a admet un maximum en $x_a = e^{-a+1}$ et on

$$a : y_a = f(x_a) = \frac{\ln(e^{-a+1}) + a}{e^{-a+1}} = \frac{-a + 1 + a}{e^{-a+1}} = \frac{1}{e^{-a+1}} = e^{a-1}.$$

La fonction f_a admet un maximum en $x_a = e^{-a+1}$ et on a : $y_a = f(x_a) = e^{a-1}$.

4. Comme on l'a vu précédemment, on a : $y_a = f(x_a) = \frac{1}{e^{-a+1}} = \frac{1}{x_a}$. Ainsi, le point

$A(x_a; y_a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction inverse.

Le point $A(x_a ; y_a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction inverse.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives de quelques fonctions f_a pour $a = -\frac{1}{2}, 0, 1$ et 2 . Pour une valeur de a donnée, le sommet de la courbe est noté S_a . En bleu, on a fait apparaître la partie de la courbe représentative de la fonction inverse correspondant aux abscisses strictement positives.

