
La fonction exponentielle

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 107 : N° 31, 32, 46, 47, 48, 49, 54

Page 112 : N° 99, 101

Page 108 : N° 63, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75
76, 77

Page 113 : N° 107, 108

N°31 page 107

On considère l'expression : $e^x + e^{-x} - 2$.

Pour tout x réel, on a :

$$e^x + e^{-x} - 2 = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = \frac{(e^x)^2 + 1 - 2e^x}{e^x} = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x}.$$

Comme l'exponentielle prend des valeurs strictement positives et que l'on a : $e^0 = 1$, on peut conclure que, pour tout x réel : $(e^x - 1)^2 \geq 0$ et $e^x > 0$. D'où finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} - 2 \geq 0}$$

N°32 page 107

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Soit la quantité : $\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$. On a, pour tout x réel : $[f(x)]^2 \geq 0$ (il s'agit d'un carré) et

donc : $1 + [f(x)]^2 \geq 1 > 0$. La quantité considérée est donc définie pour tout x réel.

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2} &= \frac{2\frac{e^x-1}{e^x+1}}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2} = \frac{2\frac{e^x-1}{e^x+1}}{1+\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}} \\ &= \frac{2\frac{e^x-1}{e^x+1}}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}} = \frac{(e^x+1)^2 \times 2\frac{e^x-1}{e^x+1}}{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2} \\ &= \frac{2(e^x+1)(e^x-1)}{(e^x)^2 + \cancel{2e^x} + 1 + (e^x)^2 - \cancel{2e^x} + 1} \\ &= \frac{2[(e^x)^2 - 1]}{2(e^x)^2 + 2} = \frac{2(e^{2x} - 1)}{2(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &= f(2x)\end{aligned}$$

N°46 page 107

On a :

$$e^{x^2} e^x = (e^3)^2 \Leftrightarrow e^{x^2+x} = e^6 \Leftrightarrow x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

L'équation du second degré obtenue est facile à résoudre (on pourra, par exemple, remarquer que 2 est racine évidente). Les solutions sont : 2 et -3.

$$\mathcal{S} = \{-3; 2\}$$

N°47 page 107

On a :

$$\frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{x^2-2x} = e^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

N°48 page 107

Remarquons d'abord que du fait de la présence de $\frac{1}{x}$ comme argument de l'exponentielle au dénominateur du membre de droite, on cherche des solutions éventuelles dans \mathbb{R}^* .

Dans ces conditions, on a :

$$e^x = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} \Leftrightarrow e^x = e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 0$$

Le numérateur ne peut s'annuler et on a finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

N°49 page 107

On a :

$$e \cdot e^{\sin x} = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow e^{1+\sin x} = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 1 + \sin x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

Comme $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, il vient : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

N°54 page 107

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f et \mathcal{C}' la courbe image de \mathcal{C} par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{j}$.

a) Notons \mathcal{C}'_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

Soit $M(x, y)$ un point du plan. Son image par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{j}$ est le point $M'\left(x, y - \frac{1}{2}\right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} M'\left(x, y - \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{C}' &\Leftrightarrow M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{2e^x - 1 - e^x}{2(1+e^x)} \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &\Leftrightarrow M'\left(x, y - \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{C}'_g \end{aligned}$$

Finalement, la courbe \mathcal{C}' est bien la courbe représentative de la fonction g .

- b) Démontrer que le point O est centre de symétrie de \mathcal{C}' équivaut à montrer que la fonction g est impaire.

La fonction g étant est définie sur \mathbb{R} , ensemble symétrique.

Pour tout x réel, on a alors :

$$g(-x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^x}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^x}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{1}{2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -g(x)$$

La fonction g est bien impaire et le résultat est établi.

- c) Il y a conservation des symétries par translation. Ainsi, O étant centre de symétrie pour la courbe \mathcal{C}' , nous pouvons en conclure que l'antécédent de ce point par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{j}$ est centre de symétrie de \mathcal{C} . Cet antécédent est

simplement l'image du point O par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{j}$, c'est-à-dire le point

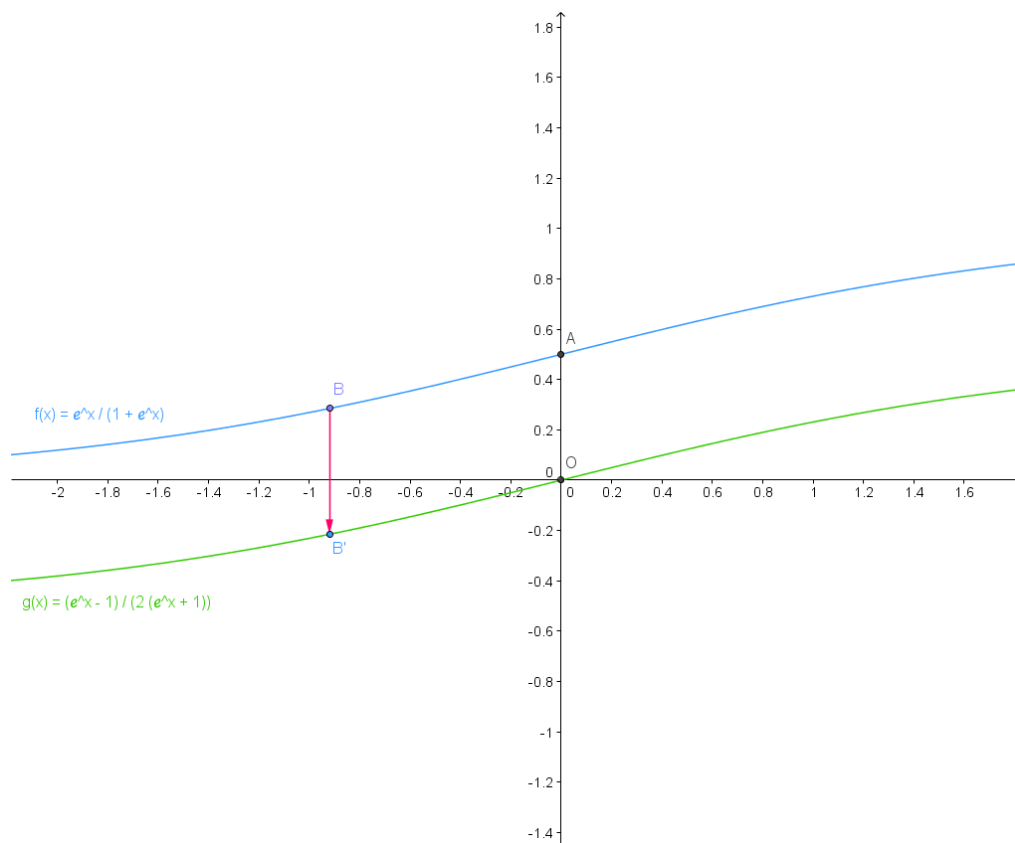
$A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ (remarque : on pouvait également conclure en montrant l'égalité :

$$\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\vec{j}.$$

A titre de complément, nous avons fourni ci-après une représentation graphique des courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

La fonction exponentielle

Correction d'exercices



N°63 page 108

1. On a la limite du cours : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

On en tire alors (somme) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x) = 2$.

D'où (rapport), finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction f admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

2. a) Pour tout x réel on a $e^x \neq 0$, d'où, en factorisation le dénominateur :

$$f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{e^x}{e^x \left(\frac{2}{e^x} + 1 \right)} = \frac{1}{1 + 2e^{-x}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + 2e^{-x}}}$$

La fonction exponentielle

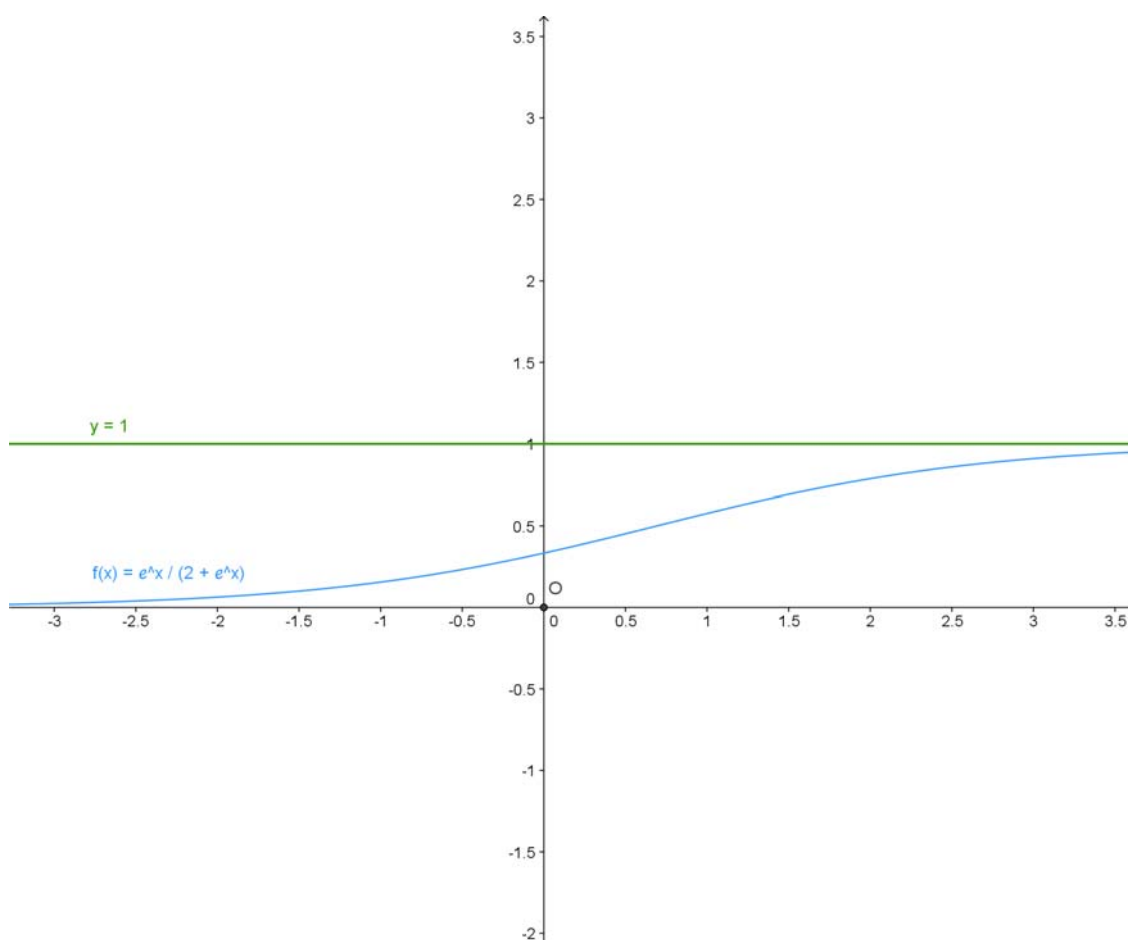
Correction d'exercices

b) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. On en déduit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2e^{-x}) = 1$ et, finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2e^{-x}} = 1$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = 1$.



N°66 page 108

Considérons d'abord la fonction $u : x \mapsto e^{3x}$.

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} (la fonction linéaire : $x \mapsto 3x$ et la fonction exponentielle).

La fonction exponentielle

Correction d'exercices

On a facilement, pour tout x réel : $u'(x) = 3e^{3x}$. En particulier : $u'(0) = 3 \times e^{3 \times 0} = 3 \times 1 = 3$.

Or, par définition : $u'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3}$$

Considérons maintenant la fonction $v : x \mapsto e^{-x}$. Nous allons procéder comme précédemment.

La fonction v est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} (la fonction linéaire : $x \mapsto -x$ et la fonction exponentielle).

On a facilement, pour tout x réel : $v'(x) = -e^{-x}$. En particulier : $v'(0) = -e^{-0} = -1$.

Or, par définition : $v'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x) - v(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [-g(x)] = -\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1}$$

N°68 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x+1)e^x}$$

N°69 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3 \times e^x + (3x-2) \times e^x = (3x+1)e^x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (3x+1)e^x}$$

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

N°70 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^x + \frac{1}{x} \times e^x = \frac{x-1}{x^2} e^x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^x}$$

N°71 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que rapport de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2 \frac{e^x \times (e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = -2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}}$$

N°72 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que rapport de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x \times (e^x + 2) - (e^x + 1) \times e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 2)^2}}$$

N°74 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que composée de la fonction inverse (dérivable sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^*) et de la fonction exponentielle (dérivable sur \mathbb{R}) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$$

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$$

N°75 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que composée de la fonction racine carrée (dérivable sur \mathbb{R}_+^*) et de la fonction exponentielle (dérivable sur \mathbb{R}) :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$$

N°76 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que composée de la fonction $g : x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$ (dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle) et de la fonction exponentielle (dérivable sur \mathbb{R}). On a, dans un premier temps :

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) = \frac{3 \times (x-1) - (3x+1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

D'où :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2} \times e^{\frac{3x+1}{x-1}}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2} \times e^{\frac{3x+1}{x-1}}$$

N°77 page 108

On dérive la fonction considérée en tant que composée de la fonction sinus (dérivable sur \mathbb{R}) et de la fonction exponentielle (dérivable sur \mathbb{R}). On a, dans un premier temps :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin' x = \cos x$$

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos x \times e^{\sin x}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos x \times e^{\sin x}}$$

N°99 page 112

$n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = e^{-nx^2}$ et on note \mathcal{C}_n sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Remarquons d'emblée que la fonction f_n est paire. Nous pourrions ainsi nous limiter à une étude sur l'ensemble \mathbb{R}^+ . Nous prenons volontairement le parti de ne « profiter » de cette caractéristique qu'au niveau du calcul des limites.

La fonction f_n est la composée de la fonction $x \mapsto -nx^2$ qui est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynômiale et de la fonction exponentielle qui est également dérivable sur \mathbb{R} . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = -2nx \times e^{-nx^2} = -2nx \times f_n(x)$$

Pour tout x réel, on a : $e^{-nx^2} > 0$. On en déduit donc que le signe de $f_n'(x)$ est celui de $-2nx$.

On en déduit alors :

- Pour $x < 0$, on a $f_n'(x) > 0$ et la fonction f_n est strictement croissante ;
- Pour $x > 0$, on a $f_n'(x) < 0$ et la fonction f_n est strictement décroissante ;
- $f_n'(0) = 0$.

En 0, la dérivée de la fonction f_n s'annule en changeant de signe : strictement positive à gauche, strictement négative à droite. On en déduit que la fonction f_n admet un maximum local en ce point. Plus précisément : pour tout x réel, on a : $nx^2 \geq 0$ et donc : $e^{-nx^2} \geq 1$, soit, finalement, en considérant les inverses : $e^{-nx^2} \leq 1$ (la valeur 1 étant atteinte pour $x = 0$). Le maximum est donc un maximum global.

Il nous reste maintenant à déterminer les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$. La fonction f_n étant paire, nous nous limitons au calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-nx^2) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. On en déduit ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

Finalemment :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$$

Nous pouvons regrouper les résultats précédents dans le tableau de variation de f_n :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
f_n	0	1	0

2. a) A la question précédente, on a établi : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = -2nx \times e^{-nx^2} = -2nx \times f_n(x)$.
La fonction f_n' est donc le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} (la fonction linéaire $x \mapsto -2nx$ et la fonction f_n) ; elle est donc à ce titre dérivable sur \mathbb{R} .

On a :

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= -2n \times f_n(x) - 2nx \times f_n'(x) \\ &= -2n \left[e^{-nx^2} + x \times (-2nx) \times e^{-nx^2} \right] \\ &= -2n(1 - 2nx^2) e^{-nx^2} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives, il vient alors :

$$\begin{aligned} f_n''(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ -2n(1 - 2nx^2) e^{-nx^2} = 0 &\Leftrightarrow \\ 1 - 2nx^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2 = \frac{1}{2n} &\Leftrightarrow \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} & \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, la dérivée seconde de f_n s'annule donc pour deux valeurs opposées : $a_n = -\frac{1}{\sqrt{2n}}$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

- b) On a : $f_n(a_n) = f_n(b_n) = e^{-\frac{1}{2}}$ (rappelons que a_n et b_n sont solutions de $1 - 2nx^2 = 0$, c'est-à-dire de : $-nx^2 = -\frac{1}{2}$).

La fonction exponentielle

Correction d'exercices

On en déduit immédiatement que les points A_n et B_n appartiennent tous deux à la droite (horizontale) d'équation : $y = e^{-\frac{1}{2}}$.

d) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$f_n'(a_n) = -2na_n \times e^{-na_n^2} = 2n \frac{1}{\sqrt{2n}} \times e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2n} \times e^{-\frac{1}{2}}$$

L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_n en A_n s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y &= f_n'(a_n) \times (x - a_n) + f_n(a_n) \\ &= \sqrt{2n} \times e^{-\frac{1}{2}} \times \left(x + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) + e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2n} \times e^{-\frac{1}{2}} \times x + 2e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En procédant de façon similaire, on obtient, pour l'équation réduite de la tangente au point B_n :

$$y = -\sqrt{2n} \times e^{-\frac{1}{2}} \times x + 2e^{-\frac{1}{2}}$$

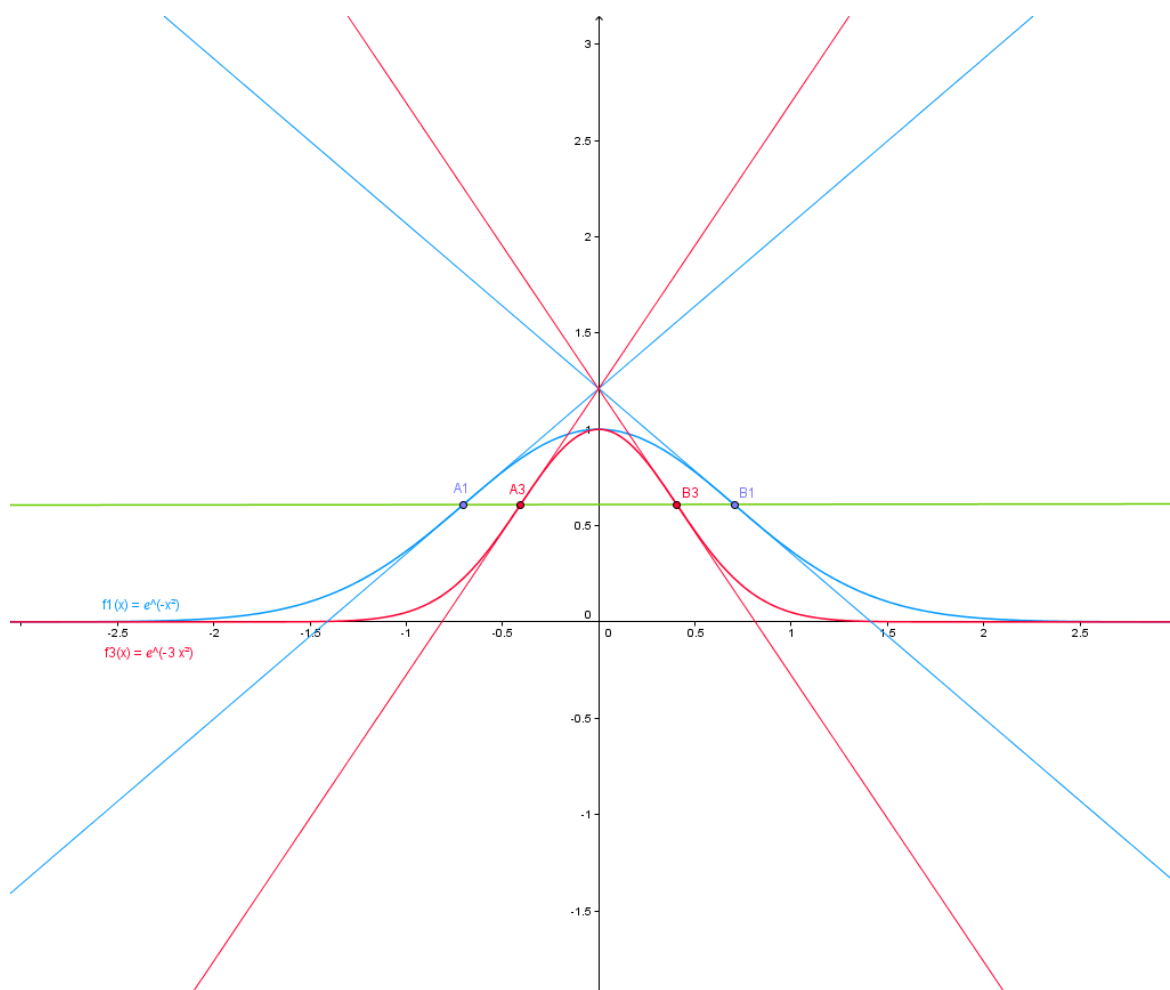
On constate que toutes ces équations ont la même ordonnée à l'origine. On en déduit que toutes les tangentes considérées passe par le point de coordonnées :

$$\left(0; 2e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

3. Une jolie figure pour finir (cf. page suivante) !

La fonction exponentielle

Correction d'exercices



N°101page 112

1. a) D'après la propriétés (1), on a, pour tout x réel : $(f(x))^2 = 1 + (g(x))^2$.

Or, pour tout x réel : $(g(x))^2 \geq 0$. D'où : $1 + (g(x))^2 \geq 1 > 0$.

Finalement : $(f(x))^2 > 0$.

On en tire finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0}$$

b) Toujours en utilisant la propriété (1) mais avec, cette fois, $x = 0$, il vient :

$$(f(0))^2 = 1 + (g(0))^2$$

Mais d'après la propriété (3) : $f(0) = 1$. On a donc : $1^2 = 1 + (g(0))^2$ et on en conclut :

$$\boxed{g(0) = 0}$$

La fonction exponentielle
Correction d'exercices

2. En procédant comme indiqué, on a, pour tout réel x : $2f'(x)f(x) - 2g'(x)g(x) = 0$.

Or, d'après la propriété (2) : $f(x) = g'(x)$.

On obtient donc : $2f'(x)f(x) - 2f(x)g(x) = 0$, soit : $f(x)[f'(x) - g(x)] = 0$.

Or, on a vu à la question 1. a) que l'on avait : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. L'égalité que nous venons d'obtenir équivaut donc finalement à :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - g(x)}$$

3. a) Comme $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$, il vient :

$$u(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1 \text{ et } v(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{u(0) = 1 \text{ et } v(0) = 1}$$

b) Pour tout x réel, on a, en tenant compte de la propriété (2) et du résultat obtenu à la question 2. : $u'(x) = (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = g(x) + f(x) = u(x)$.

De façon analogue : $v'(x) = (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = g(x) - f(x) = -v(x)$.

On a bien :

$$\boxed{u' = u \text{ et } v' = -v}$$

c) Commençons par déterminer la fonction u .

D'après la question précédente, elle vérifie l'équation différentielle : $u' = u$. Elle est donc de la forme : $u(x) = ke^x$. Comme $u(0) = 1$, on en tire $k = 1$ et, finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = e^x}$$

En procédant de façon similaire avec v , on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = e^{-x}}$$

d) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = e^x \\ f(x) - g(x) = e^{-x} \end{cases}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, on obtient : $2f(x) = e^x + e^{-x}$ et finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

La fonction exponentielle

Correction d'exercices

En soustrayant ensuite membre à membre ces deux égalités on obtient : $2g(x) = e^x - e^{-x}$
et finalement :

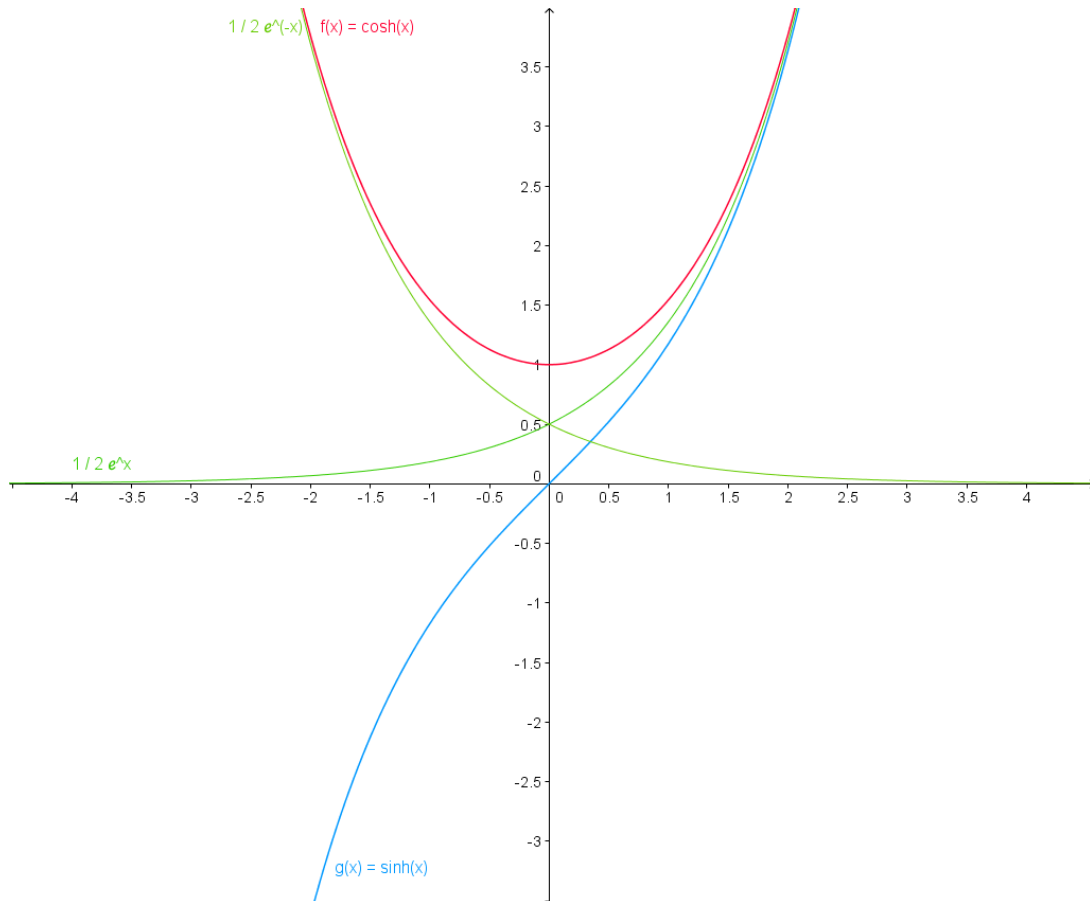
$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Les deux fonctions ci-dessus sont célèbres ! Il s'agit respectivement du cosinus hyperbolique (noté « ch » (ou « cosh » chez nos voisins et sur de nombreuses calculatrices !) et correspondant à la fonction f) et du sinus hyperbolique (noté « sh » (ou « sinh ») et correspondant à la fonction g) ... Vous devinez bien sûr que la tangente hyperbolique existe

(on la note « th ») et qu'elle est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Vous montrerez sans peine que les courbes représentatives du cosinus et du sinus hyperbolique admettent des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$ qui sont respectivement les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ (voir la figure ci-après).

Il y a beaucoup de choses à dire sur ces fonctions. Par exemple : toute fonction dont le domaine de définition est symétrique peut être décomposée de façon unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définie sur ce même domaine (Faites-le ! C'est un exercice intéressant). Si vous appliquez ce résultat à la fonction exponentielle, vous obtenez les fonctions ... cosinus et sinus hyperboliques !



La fonction exponentielle
Correction d'exercices

N°107 page 113

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{e^{2x+1} - e}{e^{3x} - 1}$$

Pour tout x réel non nul, on a :

$$f(x) = \frac{e^{2x+1} - e}{e^{3x} - 1} = \frac{e \times e^{2x} - e}{e^{3x} - 1} = \frac{e \times (e^{2x} - 1)}{e^{3x} - 1} = e \frac{e^{2x} - 1}{x} \frac{x}{e^{3x} - 1} = e \frac{e^{2x} - 1}{x} \frac{1}{\frac{e^{3x} - 1}{x}}$$

La limite en 0 du rapport $\frac{e^{2x} - 1}{x}$ est le nombre dérivé en 0 de la fonction g dérivable sur \mathbb{R} et définie par :

$$g : x \mapsto e^{2x}$$

Pour tout x réel, on a : $g'(x) = 2e^{2x}$ et donc : $g'(0) = 2$.

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2.$$

De façon analogue, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$ et donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{3x} - 1}{x}} = \frac{1}{3}$.

Il vient alors (produit) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}e$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3}e}$$

N°108 page 113

a) La fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ en tant que produit de deux fonctions (l'identité et la fonction exponentielle) dérivables sur cet intervalle. On a donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1) = 1 \times e^1 = e$$

La fonction exponentielle

Correction d'exercices

Par ailleurs, on a facilement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = a \times 1 + b = a + b$$

On aura donc :

$$f \text{ continue en } 1 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \Leftrightarrow e = a + b$$

La fonction f est continue en 1 si, et seulement si, les réels a et b vérifient :
 $a + b = e$

- b) Pour que la fonction f soit dérivable en 1, il faut qu'elle le soit à droite et à gauche et que les nombres dérivés à droite et à gauche soient égaux :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Pour tout réel x strictement inférieur à 1, on a :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{xe^x - e}{x - 1} = \frac{(x - 1)e^x + e^x - e}{x - 1} = e^x + \frac{e^x - e}{x - 1}$$

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et donc en 1. Sa dérivée étant elle-même, il vient immédiatement : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{e^x - e}{x - 1} = \exp'(1) = e^1 = e$.

La fonction exponentielle étant continue sur \mathbb{R} , on a également : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} e^x = e^1 = e$

En définitive : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(e^x + \frac{e^x - e}{x - 1} \right) = e + e = 2e$.

Par ailleurs, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{ax + b - e}{x - 1} = \frac{a(x - 1) + a + b - e}{x - 1} = a + \frac{a + b - e}{x - 1}$$

Pour que cette expression admette une limite finie lorsque x tend vers 1, il faut, et il suffit, que l'on ait : $a + b - e = 0$ (on notera, au passage, que cette condition donne d'ores et déjà, d'après la question précédente, la continuité de f en 1).

Dans ce cas, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = a$$

La fonction exponentielle

Correction d'exercices

Il vient alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow 2e = a$$

La condition $a + b - e = 0$ donne alors : $b = -e$.

Conclusion :

La fonction f est dérivable en 1 si, et seulement si, on a : $a = 2e$ et $b = -e$. Soit :

$$f : x \mapsto \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leq 1 \\ 2ex - e & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-après la courbe représentative de la fonction f obtenue pour $a = 2e$ et $b = -e$.

