

---

# Limites.

Corrigés d'exercices

Version du 26/07/2014

---

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 55 : N°2

Page 57 : N°5

Page 59 : N°10

Page 71 : N°35, 40

Page 73 : N°53

Page 74 : N°54, 55, 59, 64

Page 75 : N°68, 70, 73

Page 82 : N°107

Page 83 : N°109

Page 84 : N°111, 113

Page 87 : N°130

Page 89 : N°140

## **N°2 page 55**

A la calculatrice, il semble que l'on ait :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Considérons un entier non nul  $n$ . On a :

$$f(x) \leq -10^n \Leftrightarrow -x^2 + 3x \leq -10^n \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10^n \geq 0$$

Pour  $x = 10^n$ , on a :  $x^2 - 3x - 10^n = (10^n)^2 - 3 \times 10^n - 10^n = (10^n)^2 - 4 \times 10^n = 10^n \times (10^n - 4)$ .

Cette expression est strictement positive ( $n \geq 1 \Leftrightarrow 10^n \geq 10 \Leftrightarrow 10^n - 4 \geq 6 > 0$ ).

Or, la fonction  $x \mapsto x^2 - 3x - 10^n$  est strictement croissante sur  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$  et donc sur

$\left[10^n; +\infty\right]$ . Ainsi, pour tout  $x \geq 10^n$ , on aura  $x^2 - 3x - 10^n \geq 0$ , c'est-à-dire  $f(x) \leq -10^n$ .

On a bien :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

## **N°5 page 57**

Pour tout réel  $x$  non nul, on a :  $x^3 - x = x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ .

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

---

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ , on a (somme) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$  et (produit)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \right] = +\infty.$$

Par ailleurs, on a immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = +\infty$ .

Nous avons donc affaire ici à une forme indéterminée du type «  $\frac{\infty}{\infty}$  ».

En factorisant au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré, on obtient, pour tout  $x$  réel non nul :

$$\frac{x^3 - x}{x + 2} = \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = x^2 \times \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}$$

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} + \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times \\ \Rightarrow \end{array} +\infty$$

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x}{x + 2} = +\infty$$

### N°10 page 59

a. La fonction  $f$  est la composée de la fonction  $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$  et de la fonction racine carrée.

Nous calculons ainsi les limites demandées comme limites d'une fonction composée.

**Limite en  $+\infty$ .**

On a, pour tout  $x$  réel non nul : 
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , on a (somme) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$  puis (rapport) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Par ailleurs :  $\lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1.$

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

**Limite en 1.**

La fonction  $f$  n'étant défini qu'à droite de 1, on cherche  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x).$

On a :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x+1) = 1+1 = 2$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0^+.$

On en déduit (rapport) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty.$

Par ailleurs :  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty.$

Finalement :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$

- b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  signifie que la courbe représentative de la fonction  $f$  admet, au voisinage de  $+\infty$ , une tangente horizontale d'équation  $y = 1.$

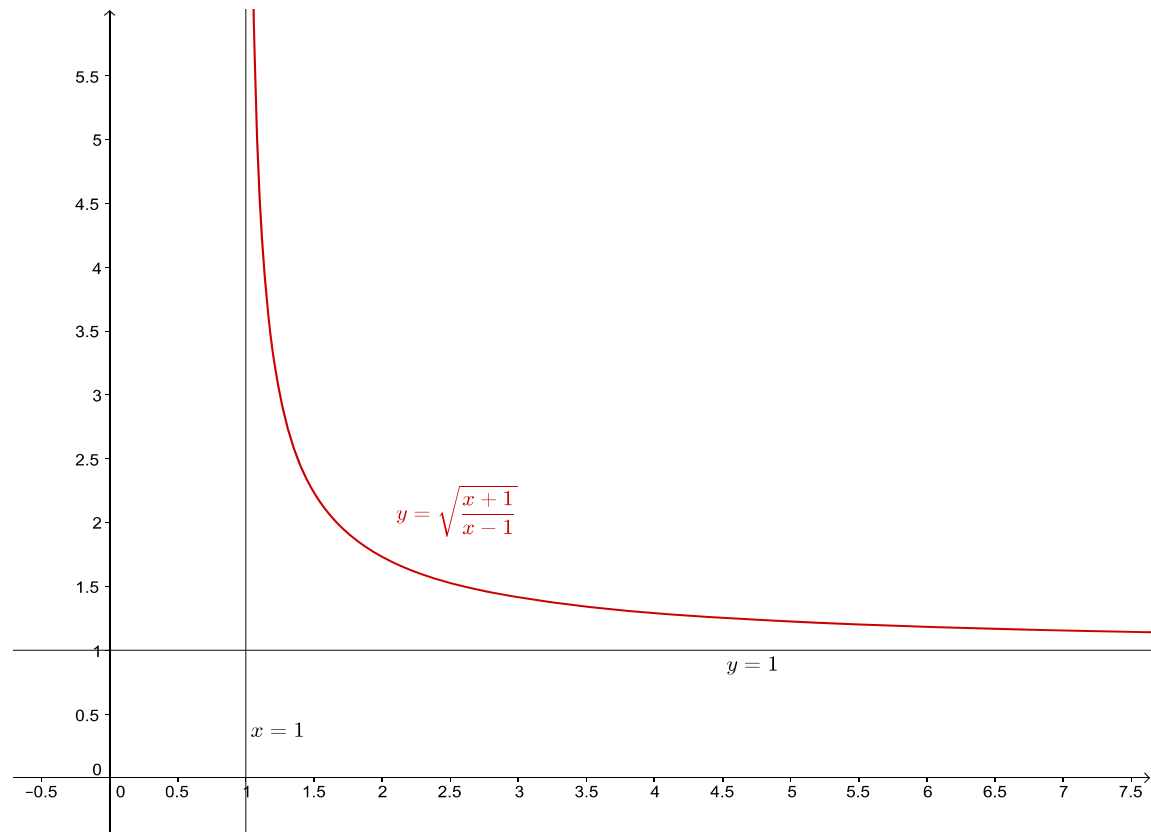
## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$  signifie que la courbe représentative de la fonction  $f$  admet la droite d'équation  $x = 1$  comme asymptote horizontale.

La courbe représentative de la fonction  $f$  admet deux asymptotes : une asymptote horizontale, d'équation  $y = 1$ , et une asymptote verticale, d'équation  $x = 1$ .

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction  $f$  et des deux asymptotes.



### **N°35 page 71**

Nous allons mener un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe un réel strictement positif  $x_0$  tel que  $f(x_0) < 0$ .

Dès lors, comme la fonction  $f$  est décroissante, on a :  $x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) < 0$ . A partir du réel  $x_0$ , la fonction prend des valeurs inférieure au réel strictement négatif  $f(x_0)$ .

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

Considérons alors le réel strictement positif  $\varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2}$ .

Comme on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , il existe un réel  $A$  tel que :  $x \geq A \Rightarrow -\varepsilon \leq f(x) \leq \varepsilon$  c'est-à-dire

$$\frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) \leq -\frac{f(x_0)}{2}.$$

Pour tout réel  $x$  supérieur à  $x_0$  et à  $A$  (c'est-à-dire  $x \geq \max(x_0, A)$ ), on a :  $f(x) \leq f(x_0)$  et

$$\frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) \leq -\frac{f(x_0)}{2}. \text{ On en déduit, } f(x_0) \text{ étant strictement négatif :}$$

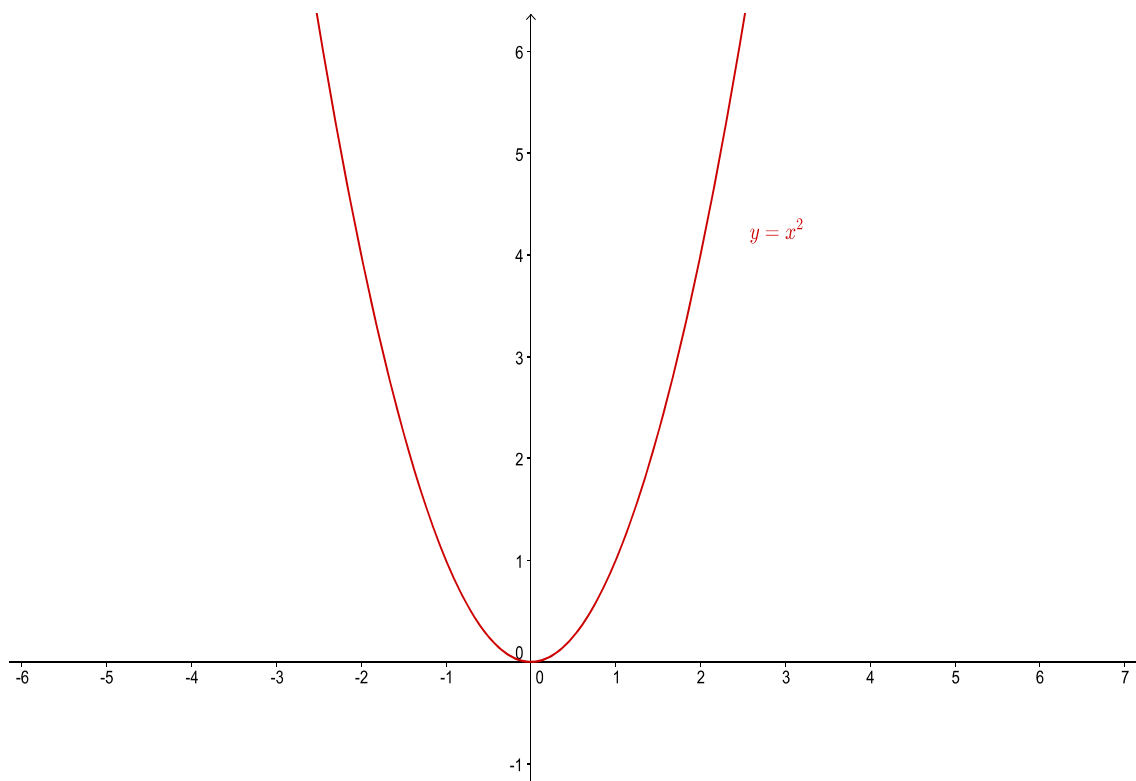
$$f(x) \leq f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) \text{ et, finalement : } f(x) < f(x), \text{ ce qui est absurde !}$$

Le réel  $x_0$  tel que  $f(x_0) < 0$  n'existe pas et on a finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 0$$

### N°40 page 71

1. On a classiquement :



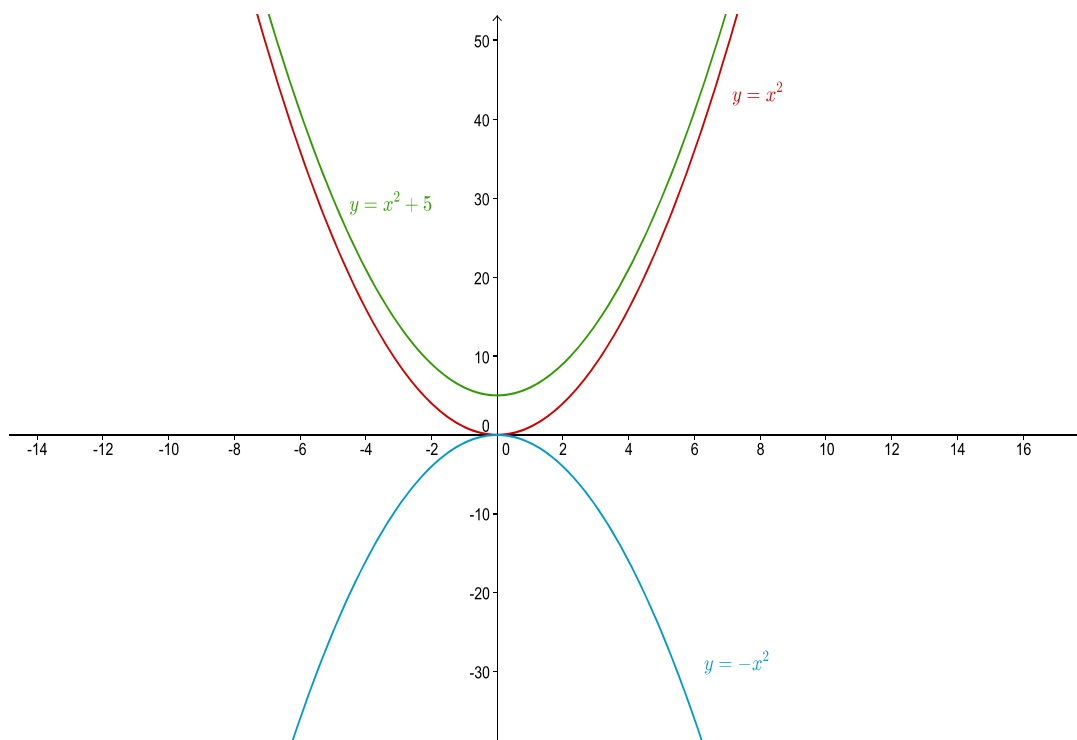
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

2. En supposant le repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction  $g : x \mapsto -x^2$  est obtenue à partir de celle de la fonction  $f$  en lui appliquant la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

La courbe représentative de la fonction  $h : x \mapsto x^2 + 5$  est obtenue à partir de celle de la fonction  $f$  en lui appliquant la translation de vecteur  $5\vec{j}$ .



3. Par lecture graphique, on peut conjecturer facilement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

### N°53 page 73

- a. On a facilement :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{multiplication} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-3) = +\infty$$

b. On a cette fois :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{multiplication} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x^2)(x+2)] = +\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{addition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [(-x^2)(x+2)+1] = +\infty \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(-x^2)(x+2)+1] = +\infty$$

**N°54 page 74**

a. En tenant compte de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ , il vient :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{addition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right) = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{multiplication} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right) \right] = +\infty \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right) \right] = +\infty$$

b. En tenant compte de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{addition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{3}{x}\right) = -\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{multiplication} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-3x \left(x + \frac{3}{x}\right)\right] = -\infty \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-3x \left(x + \frac{3}{x}\right)\right] = -\infty$$

**N°55 page 74**

a. En tenant compte de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 4\right) = -4 \end{array} \right\} \text{multiplication} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) \left(\frac{1}{x} - 4\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) \left(\frac{1}{x} - 4\right) = -\infty$$

b. En tenant compte de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 5) = +\infty$ .

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type «  $0 \times \infty$  ».

Pour tout  $x$  non nul, il vient alors :  $\frac{2}{x} \times (x + 5) = \frac{2}{x} \times x \times \left(1 + \frac{5}{x}\right) = 2 \times \left(1 + \frac{5}{x}\right)$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$ , il vient (addition) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right) = 1$  puis (multiplication) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2 \times \left(1 + \frac{5}{x}\right) \right] = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{x} \times (x + 5) \right] = 2$$

**N°59 page 74**

a.  $f : x \mapsto \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 1)$  sur  $]0; +\infty[$ .

Dans un premier temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en 0 à droite.

On a classiquement :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ . D'où :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} + 2\right) = +\infty$ .

Par ailleurs :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$ .

On en déduit finalement (multiplication) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -\infty$$

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

Dans un second temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

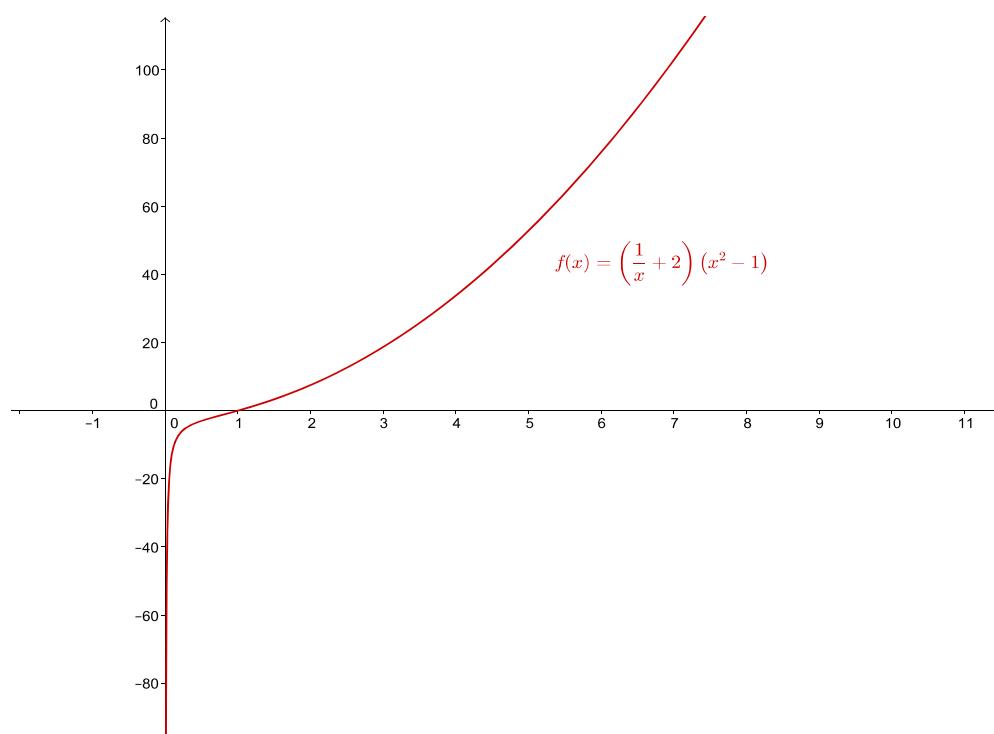
On a classiquement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . D'où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + 2 \right) = 0 + 2 = 2$ .

Par ailleurs :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ .

On en déduit finalement (multiplication) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

A titre de complément, nous fournissons une représentation graphique de la fonction  $f$  :



b.  $f : x \mapsto \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 1)$  sur  $]-\infty ; 0[$ .

Dans un premier temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en 0 à gauche.

On a classiquement :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ . D'où :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( \frac{1}{x} + 2 \right) = -\infty$ .

Par ailleurs :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$ .

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

On en déduit finalement (multiplication) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( \frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 - 1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$$

Dans un second temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

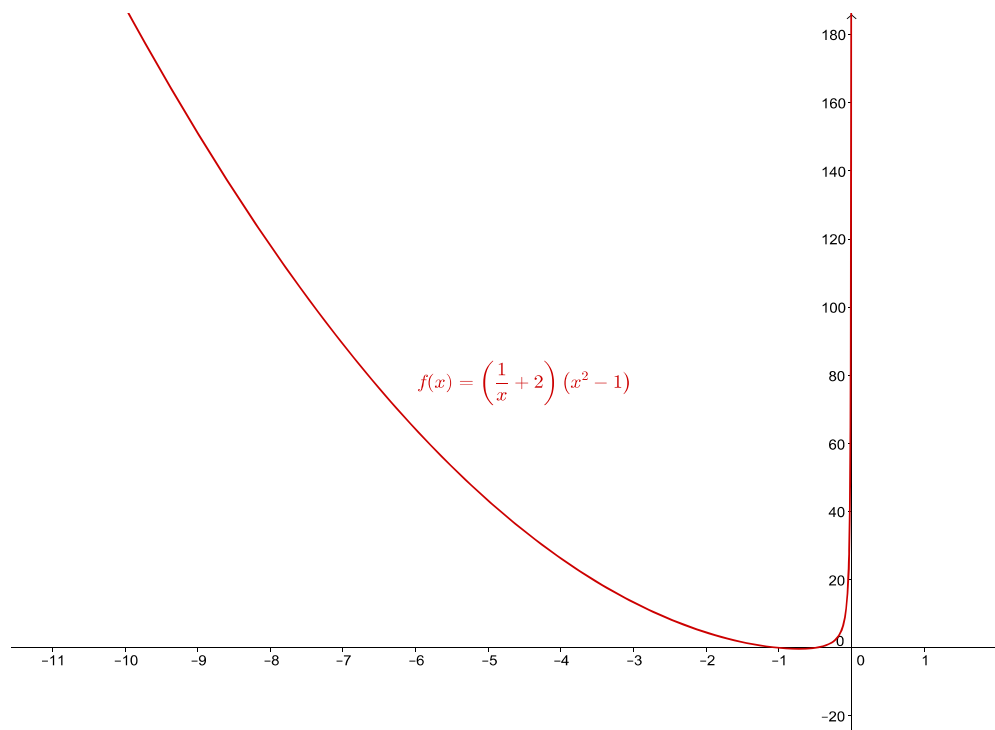
On a classiquement :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ . D'où :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} + 2 \right) = 0 + 2 = 2$ .

Par ailleurs :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ .

On en déduit finalement (multiplication) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

A titre de complément, nous fournissons une représentation graphique de la fonction  $f$  :



c.  $f : x \mapsto \frac{(3-2x)^3}{1-x}$

Dans un premier temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en 1 à gauche.

On a immédiatement :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (3-2x)^3 = \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^3 = (3-2 \times 1)^3 = 1^3 = 1$ .

Par ailleurs, pour  $x < 1$ , on a :  $1-x > 0$  et donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x) = 0^+$ .

On en déduit finalement (division) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{(3-2x)^3}{1-x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

Dans un second temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

On a d'abord :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3-2x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} X^3 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3-2x)^3 = +\infty$$

Et :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$ .

Nous avons ainsi affaire à une forme indéterminée du type «  $\frac{\infty}{\infty}$  ».

Pour tout  $x$  réel non nul, on a :

$$f(x) = \frac{(3-2x)^3}{(1-x)} = \frac{\left[ x \left( \frac{3}{x} - 2 \right) \right]^3}{x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)} = \frac{x^3 \left( \frac{3}{x} - 2 \right)^3}{x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)} = x^2 \times \frac{\left( \frac{3}{x} - 2 \right)^3}{\frac{1}{x} - 1}$$

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

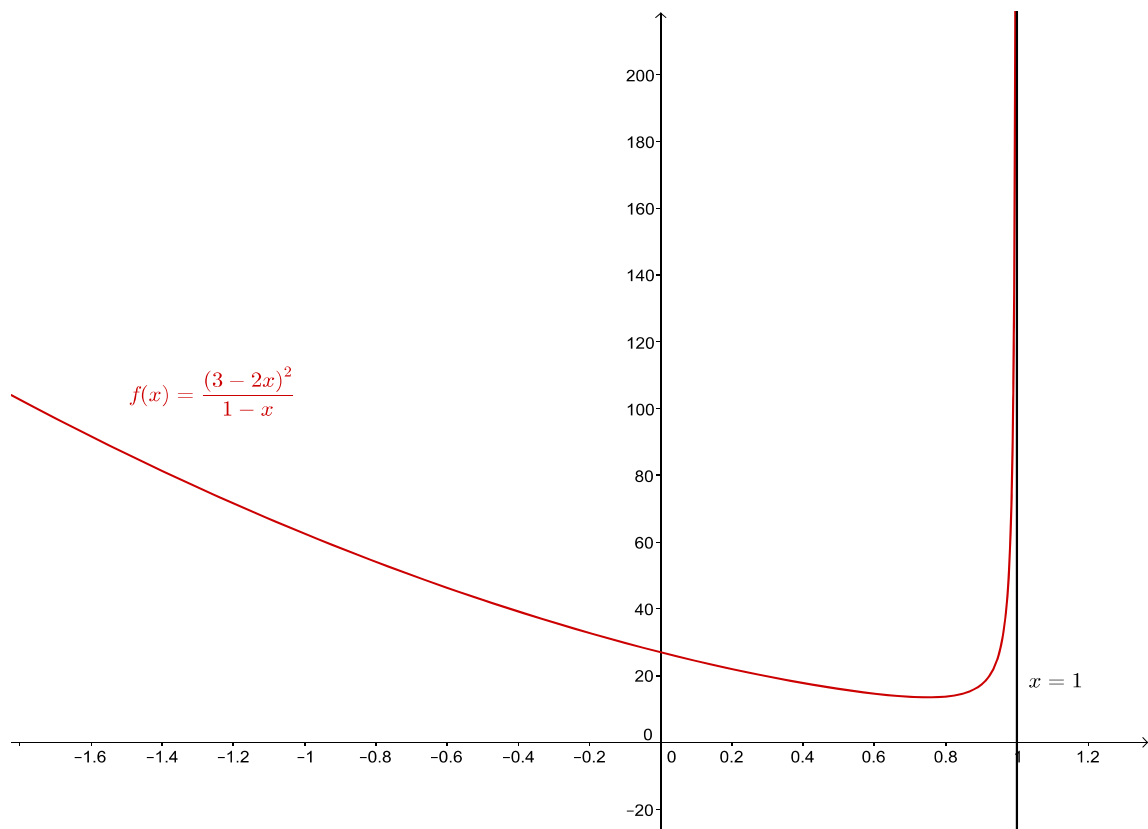
On a immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  puis :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{addition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{x} - 2 \right) = -2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{x} - 2 \right) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2} X^3 = (-2)^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{x} - 2 \right)^3 = -8 \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{x} - 2 \right)^3 = -8 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{division} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left( \frac{3}{x} - 2 \right)^3}{\frac{1}{x} - 1} = 8 \end{array}$$

Finalement (multiplication) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

A titre de complément, nous fournissons une représentation graphique de la fonction  $f$  (bien noter que le repère n'est pas orthonormé) :



## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

d.  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

Dans un premier temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en 2 à droite.

On a :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x^2 - 4x + 4) = 2^2 - 4 \times 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x - 2) = 2 - 2 = 0$ .

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type «  $\frac{0}{0}$  ».

Comme le numérateur, qui est une fonction polynôme de degré 2, s'annule pour  $x = 2$ , on peut mettre  $x - 2$  en facteur. On obtient facilement :  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ .

Pour tout  $x$  réel strictement supérieur à 2, on a ainsi :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2}{x - 2} = x - 2$$

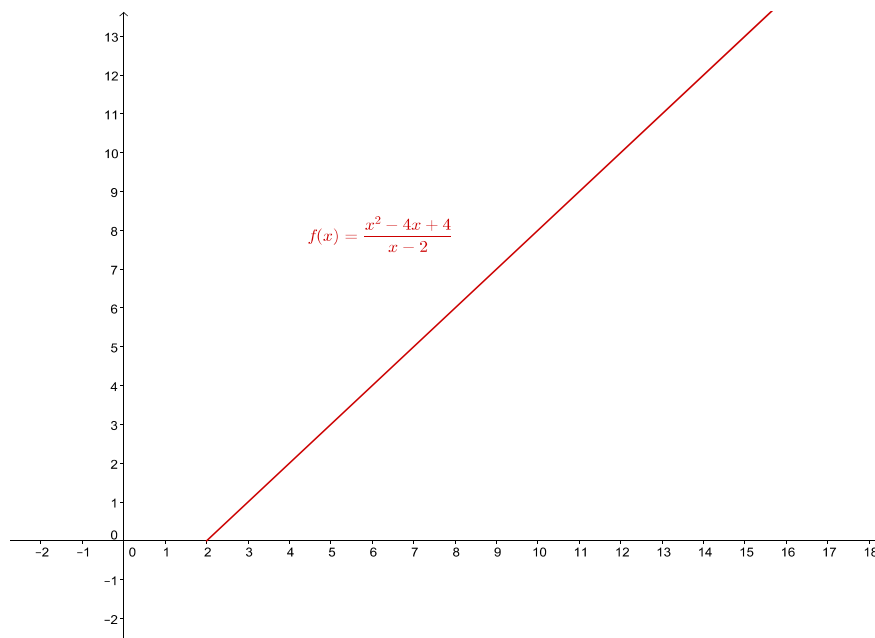
Il vient alors :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x - 2) = 2 - 2 = 0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = 0$$

Dans un second temps, déterminons la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

On a immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ .

A titre de complément, nous fournissons une représentation graphique de la fonction  $f$  :



**N°64 page 74**

1.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x = \sqrt{x^2 + 4} + (-x)$ .

On a d'abord :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ .

Puis :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \text{composition} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$$

Il vient donc (somme) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2. On utilise l'expression conjuguée en notant que pour tout réel  $x$  positif on a

$$\sqrt{x^2 + 4} + x > 0 :$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{\sqrt{x^2 + 4}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x}$$

De façon analogue à ce qui a été fait à la question précédente, on montre que l'on a :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x) = +\infty$ . D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4}{X} = 0 \end{array} \right\} \text{composition} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

**N°68 page 75**

1. Pour tout  $x$  réel, on a :  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

On en déduit :  $-1 \leq -\sin x \leq 1$  puis  $1 \leq 2 - \sin x \leq 3$  et, enfin :  $x^2 \leq (2 - \sin x) \times x^2 \leq 3x^2$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , il vient, d'après le théorème de comparaison (minoration) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Pour tout  $x$  réel, on a :  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .

On en déduit :  $-4 \leq \cos x - 3 \leq -2$  puis  $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\cos x - 3} \leq -\frac{1}{4}$  et enfin, pour tout réel  $x$

positif :  $-\frac{3x}{2} \leq \frac{3x}{\cos x - 3} \leq -\frac{3x}{4}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{3x}{4} \right) = -\infty$ , il vient, d'après le théorème de comparaison (majoration) :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
---

**N°70 page 75**

1. Pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on a :  $0 < 1 \leq x \leq 1+x$ , d'où :  $\frac{x}{1+x} \leq 1$ .

On a aussi :  $x \leq 1 \Rightarrow 1+x \leq x+x = 2x$ . D'où :  $\frac{1+x}{2} \leq x$  et,  $1+x$  étant strictement positif :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x}.$$

En définitive :

$\forall x \in [1; +\infty[ , \frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$
--

Remarque : on pouvait également établir cette double inégalité en étudiant la fonction

$x \mapsto \frac{x}{x+1}$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ . Elle y est strictement croissante et on a facilement

$f(1) = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . La double inégalité en découle.

2. Pour tout réel  $x$ , supérieur ou égal à 1, on a, d'après la double inégalité précédente :

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \leq \frac{x\sqrt{x}}{1+x} \leq \sqrt{x}$$

On a immédiatement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$  et le théorème de comparaison (minoration) nous permet de conclure :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1+x} = +\infty$
--

Pour tout réel  $x$ , supérieur ou égal à 1, on a aussi, d'après la double inégalité précédente :

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , il vient, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)} = 0$$

**N°73 page 75**

a. Par définition de la partie entière, on a, pour tout réel  $x$  :  $E(x) \leq x < E(x)+1$ .

L'inégalité  $x < E(x)+1$  donne  $x-1 < E(x)$ . D'où :  $x-1 \leq E(x)$ .

En définitive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x-1 \leq E(x) \leq x$$

b. Pour tout réel  $x > 0$ , la double inégalité précédente donne :  $\frac{x-1}{x} \leq \frac{E(x)}{x} \leq \frac{x}{x}$ .

Soit :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$  et le théorème d'encadrement nous permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

**N°107 page 82**

1. Pour tout réel  $x$  non nul, on a :  $f(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x-2} = \frac{x^2 \left(-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = x \frac{-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , il vient :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right) = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$ .

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

---

On en déduit (division) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = -2$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ , il vient finalement (multiplication) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

On procède de façon similaire en  $+\infty$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , il vient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right) = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$ .

On en déduit (division) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = -2$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , il vient finalement (multiplication) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. On a :  $\lim_{x \rightarrow 2} (-2x^2 + 7x - 8) = -2 \times 2^2 + 7 \times 2 - 8 = -8 + 14 - 8 = -2$ .

Comme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x - 2) = 0^-$ , il vient (division) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ .

Par ailleurs, comme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x - 2) = 0^+$ , il vient (division) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty.$$

On déduit des résultats précédents que :

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  admet pour asymptote verticale la droite d'équation  $x = 2$ .

3. La fonction  $f$  est une fonction rationnelle. Elle est donc dérivable sur son domaine de définition. Pour tout réel  $x$  différent de 2, il vient alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-2 \times 2x + 7)(x - 2) - (-2x^2 + 7x - 8) \times 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{(-4x + 7)(x - 2) - (-2x^2 + 7x - 8)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 15x - 14 + 2x^2 - 7x + 8}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(x - 2)^2} \\ &= -2 \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

On obtient facilement les racines de  $x^2 - 4x + 3$  : ce sont 1 (racine évidente) et 3.

On en déduit alors immédiatement :

- Si  $x \in ]-\infty ; 1[ \cup ]3 ; +\infty[$ , alors  $x^2 - 4x + 3 > 0$  et donc  $f'(x) < 0$ . La fonction  $f$  est ainsi strictement décroissante sur les intervalles  $]-\infty ; 1[$  et  $]3 ; +\infty[$ .
- Si  $x \in ]1 ; 2[ \cup ]2 ; 3[$  (ne pas oublier que 2 est valeur interdite) alors  $x^2 - 4x + 3 < 0$  et donc  $f'(x) > 0$ . La fonction  $f$  est ainsi strictement croissante sur les intervalles  $]1 ; 2[$  et  $]2 ; 3[$ .

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur les intervalles  $]-\infty ; 1[$  et  $]3 ; +\infty[$   
et strictement croissante sur les intervalles  $]1 ; 2[$  et  $]2 ; 3[$ .

4. a. Pour tout réel  $x$  différent de 2, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - (-2x + 3) &= \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} - (-2x + 3) \\ &= \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} + (2x - 3) \\ &= \frac{-2x^2 + 7x - 8 + (2x - 3)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \frac{\cancel{-2x^2} + \cancel{7x} - 8 + \cancel{2x^2} - \cancel{7x} + 6}{x - 2} \\ &= \frac{-2}{x - 2} \end{aligned}$$

Pour tout réel  $x$  différent de 2, on a :

$$f(x) - (-2x + 3) = \frac{-2}{x-2}$$

b. Pour étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\Delta$ , il suffit d'étudier le signe de la différence  $f(x) - (-2x + 3)$ .

D'après la question précédente, cette différence est égale à  $\frac{-2}{x-2}$ . Il vient donc immédiatement :

- Si  $x < 2$ ,  $x - 2 < 0$  et donc  $\frac{-2}{x-2} > 0$ . La différence  $f(x) - (-2x + 3)$  étant strictement positive, on en déduit que la courbe  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de la droite  $\Delta$ .
- Si  $x > 2$ ,  $x - 2 > 0$  et donc  $\frac{-2}{x-2} < 0$ . La différence  $f(x) - (-2x + 3)$  étant strictement négative, on en déduit que la courbe  $\mathcal{C}$  est située en dessous de la droite  $\Delta$ .

Finalement :

Sur l'intervalle  $] -\infty ; 2[$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de la droite  $\Delta$   
et sur l'intervalle  $] 2 ; +\infty[$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est située en dessous de la droite  $\Delta$ .

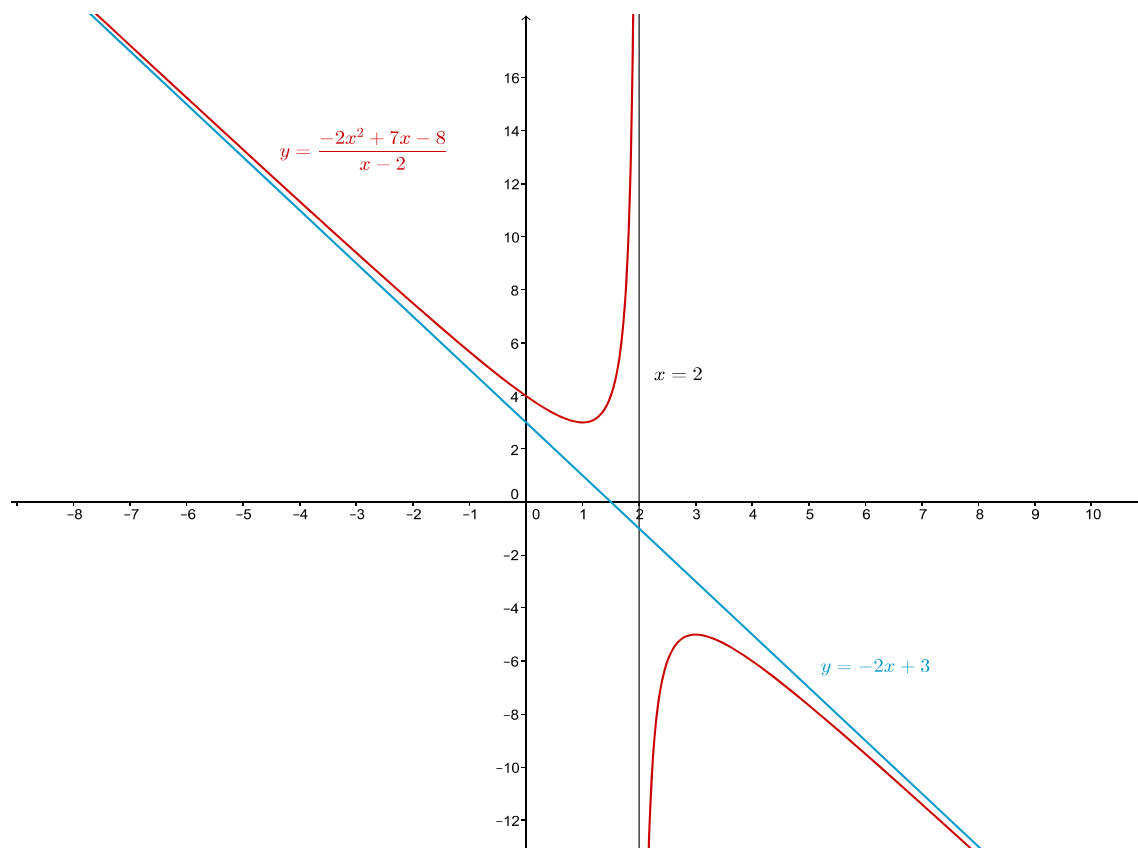
c. D'après la question 4.a. on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x-2}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ , il vient immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x-2} = 0$  et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = 0$$

Le résultat précédent signifie que plus  $x$  est grand plus la courbe  $\mathcal{C}$  se rapproche de la droite  $\Delta$ . On dit que la droite «  $\Delta$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$  ». On remarque également que l'on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = 0$ . Ainsi,  $\Delta$  est également asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\Delta$  (pour une meilleure lisibilité, le repère n'est pas orthonormé).



**N°109 page 83**

1. Pour tout réel  $x$  différent de 0, on a :

$$f(-x) = -x \sqrt{1 + \frac{1}{(-x)^2}} = -x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = -f(x)$$

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  : pour tout  $x$  dans  $\mathcal{D}_f$ ,  $-x$  est aussi dans  $\mathcal{D}_f$ . De surcroît, on vient de montrer que pour tout réel  $x$  non nul, on a :  $f(-x) = -f(x)$ . La fonction  $f$  est donc impaire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'origine du repère.

## Limites

Corrigés d'exercices / Version du 26/07/2014

2. Pour tout réel  $x$  non nul, on a :  $g(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2 + 1}$ .

Il vient alors, en tirant parti de la continuité de la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  en 0 et de celle de la fonction racine carrée en :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x^2 + 1} = 1 \end{array}$$

Par ailleurs :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{somme} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \\ \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{produit} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty \end{array}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

3. Comme on la vu à la question précédente, pour tout réel  $x$  non nul, on a :  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

Soit alors  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs tels que :  $0 < a < b$ . On a alors

$\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1} > 2 > 0$  et donc :

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= \sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{a^2 + 1} = \frac{(\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{a^2 + 1})(\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1})}{\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \frac{(b^2 + 1) - (a^2 + 1)}{\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \frac{(b - a)(b + a)}{\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

Comme  $b + a > 0$  et  $\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1} > 0$ ,  $g(b) - g(a)$  et  $b - a$  sont de même signe et comme  $0 < a < b$ , il vient finalement :  $g(a) < g(b)$  :

La fonction  $g$  est strictement croissante.

4. Pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :

$$\frac{g(x)-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{(x^2+1)-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

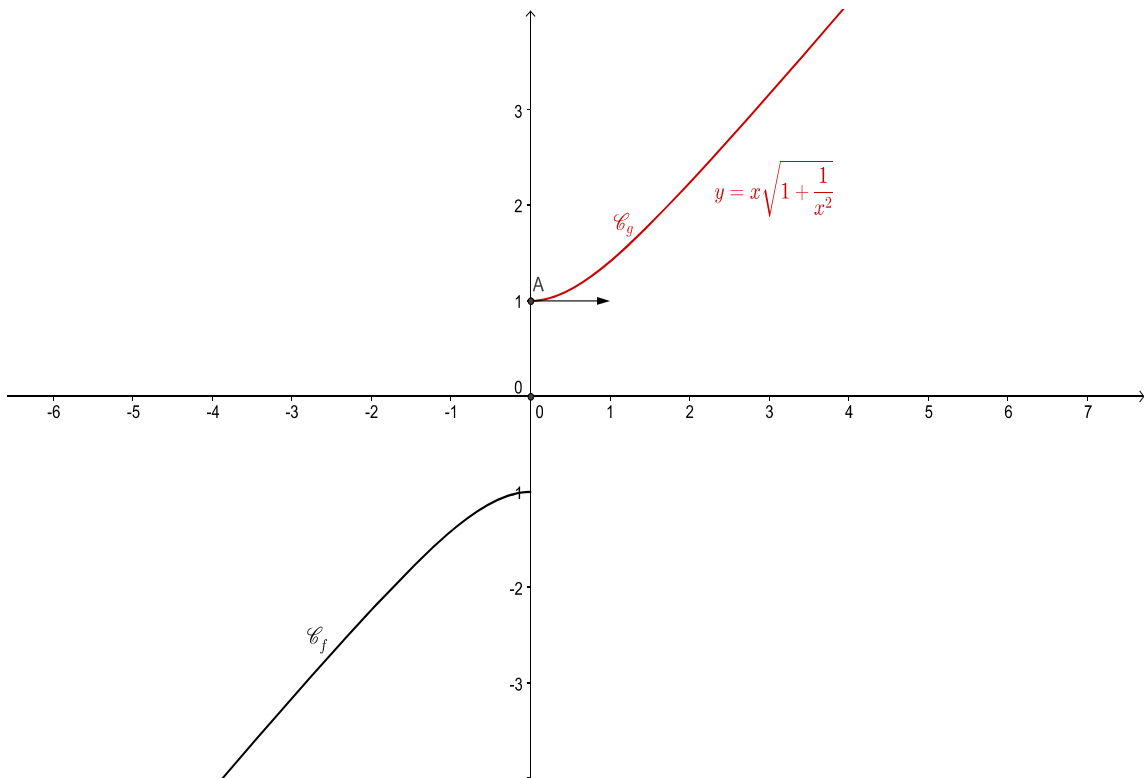
On a vu à la deuxième question que l'on avait  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x^2+1} = 1$ .

On en tire immédiatement (rapport) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$$

On en déduit que la courbe  $\mathcal{C}_g$  admet au point  $A(0;1)$  une demi-tangente horizontale.

5. On obtient facilement :



**N°111 page 84**

- a. A partir, par exemple, de la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$ , on peut conjecturer qu'elle admet pour centre de symétrie l'origine du repère.

On note, dans un premier temps, que l'on a :  $\forall x \in \mathbb{R}, |x|+1 \geq 1 > 0$ . La fonction  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ .

On a par ailleurs :  $f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = -\frac{x}{|x|+1} = -f(x)$ .

On en déduit que la fonction  $f$  est impaire. La conjoncture est vraie.

La courbe  $\mathcal{C}$  admet pour centre de symétrie l'origine du repère.

- b. On a :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (|x|+1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x+1) = 0+1 = 1$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (|x|+1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x+1) = -0+1 = 1$ .

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|+1) = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|+1) = 1$$

- c. Pour  $x$  strictement négatif, on a :  $f(x) = \frac{x}{-x+1}$ .

On a donc :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{-x+1}-0}{x-0} = \frac{1}{-x+1}$ .

Il vient alors :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{-x+1} = \frac{1}{-0+1} = 1$ .

Pour  $x$  strictement positif, on a :  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ .

On a donc :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{x+1}-0}{x-0} = \frac{1}{x+1}$ .

Il vient alors :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1$ .

On déduit de ce qui précède :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ .

La fonction  $f$  est dérivable en 0 et on a :  $f'(0) = 1$ .

d. Pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :  $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient immédiatement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$ .

Finalement :

La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

e. Pour tout réel  $x$  strictement négatif, on a :  $f(x) = \frac{x}{-x+1} = \frac{x}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{-1+\frac{1}{x}}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient immédiatement  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-1+\frac{1}{x}} = -1$ .

Finalement :

La droite d'équation  $y = -1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .

**N°113 page 84**

1. D'après le logiciel de calcul formel, on a :  $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$ .

Le discriminant du trinôme  $x^2 + ax + a^2$  s'écrit :  $\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times a^2 = -3a^2$ .

On va donc distinguer deux cas suivant que  $a$  est nul ou pas :

- Si  $a = 0$ .

On a :  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

- Si  $a \neq 0$ .

On a  $-3a^2 < 0$  et le trinôme  $x^2 + ax + a^2$  ne s'annule pas.

Le produit  $(x-a)(x^2 + ax + a^2)$  ne s'annule que pour  $x = a$  et, finalement :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ .

Finalement :

$\forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$

2. Pour tout réel  $x$  différent de  $a$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-a} - \frac{a^2 x^2}{x^3 - a^3} \\ &= \frac{1}{x-a} - \frac{a^2 x^2}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} \\ &= \frac{x^2 + ax + a^2 - a^2 x^2}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} \\ &= \frac{(1-a^2)x^2 + ax + a^2}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} [(1-a^2)x^2 + ax + a^2] = (1-a^2) \times a^2 + a \times a + a^2 = (1-a^2) \times a^2 + 2a^2 = (3-a^2) \times a^2$$

Ainsi :

- Si  $a = 0$ .  
 $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $f$  n'admet pas de limite en 0.

- Si  $a \neq 0$ .

On a :  $f(x) = \frac{(1-a^2)x^2 + ax + a^2}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}$  et  $\lim_{x \rightarrow a} [(1-a^2)x^2 + ax + a^2] = (3-a^2) \times a^2$ .

La limite est nulle pour  $a = \pm\sqrt{3}$ .

Traisons en détail le cas  $a = \sqrt{3}$ .

Pour  $a = \sqrt{3}$ , on a :

$$\begin{aligned} (1-a^2)x^2 + ax + a^2 &= (1-3)x^2 + \sqrt{3}x + 3 \\ &= -2x^2 + \sqrt{3}x + 3 \\ &= -2(x-\sqrt{3})\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour tout réel  $x$  dans  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\}$ , on a alors :

$$f(x) = \frac{(1-a^2)x^2 + ax + a^2}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{-2(x-\sqrt{3})\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(x-\sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3)} = -2 \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2 + \sqrt{3}x + 3}$$

Il vient enfin :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \left( -2 \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2 + \sqrt{3}x + 3} \right) = -2 \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3} = \frac{-3\sqrt{3}}{9} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

De façon analogue, on montre :  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

La fonction  $f$  admet une limite en  $a$  pour  $a = \pm\sqrt{3}$  et on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\sqrt{3}} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**N°130 page 87**

Le fait que les fonctions sinus et cosinus soient bornées joue un rôle déterminant dans cet exercice. On a ainsi l'intuition que le numérateur et le dénominateur sont proches de  $x$  et  $2x$  respectivement quand  $x$  est « grand » et donc que leur rapport tend bien vers  $\frac{1}{2}$  ...

Formalisons un peu tout ceci.

Pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1 (et donc non nul), on a :

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{2x + \cos x} = \frac{x \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left( 2 + \frac{\cos x}{x} \right)} = \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\cos x}{x}}$$

Pour tout  $x$  réel, on a :  $-1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$  et  $-1 \leq \cos x \leq 1$ . Alors, pour tout  $x$  réel strictement

positif, on a :  $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$  et  $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ , on a, par encadrement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$  et,

$$\text{finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

**N°140 page 89**

Comme on a :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ , il vient :  $\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p-f}{fp}$  et donc :  $q = u(p) = \frac{1}{\frac{p-f}{fp}} = \frac{fp}{p-f}$ .

1. La fonction  $u$  est dérivable sur l'intervalle  $]f ; +\infty[$  en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle et on a, pour tout réel  $p$  strictement supérieur à  $f$ :

$$u'(p) = \frac{fp}{p-f} = \frac{f \times (p-f) - fp \times 1}{(p-f)^2} = \frac{-f^2}{(p-f)^2}$$

On en déduit immédiatement :

La fonction  $u$  est strictement décroissante sur  $]f ; +\infty[$ .

2. On a :  $u(p) = \frac{1}{\frac{p-f}{fp}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{fp}{p-f}$ .

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{p \rightarrow f \\ p > f}} (fp) = \lim_{p \rightarrow f} (fp) = f^2 \\ \lim_{\substack{p \rightarrow f \\ p > f}} (p-f) = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{division} \quad \lim_{\substack{p \rightarrow f \\ p > f}} \frac{fp}{p-f} = \lim_{\substack{p \rightarrow f \\ p > f}} u(p) = +\infty$$

Si l'objet est situé en un point focal (ou, dans la pratique, à proximité) d'une lentille convexe, alors l'image formée de cet objet à travers la lentille est « renvoyée » à l'infini (les rayons, après avoir traversé la lentille, sont parallèles à son axe).

Par ailleurs :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$ , d'où  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{f}$  et enfin :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} u(p) = f$ .

Si l'objet est situé à l'infini (dans la pratique, très éloigné de la lentille) alors l'image de cet objet se formera au point focal situé de l'autre côté de la lentille.