Logarithmes

Corrigés d'exercices

$\boxed{\text{Page 131}}$: N°**55**, **59**, **63**, **73**, **75**
$\boxed{\text{Page 132}}$: N°**80**, **83**
$\boxed{\text{Page 133}}$: N°**92**, **93**, **102**, **104**
$\boxed{\text{Page 137}}$: N°**118**
$\boxed{\text{Page 138}}$: N°**121**, **122**
$\boxed{\text{Page 139}}$: N°**128**, **130**, **132**

N°55 page 131

a) $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$.

Pour que les logarithmes soient définis, il faut que *x* vérifie :

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases}$$

Or, on a :

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>-2 \\ x>-11 \end{cases} \Leftrightarrow x>-2$$

On cherche donc les éventuelles solutions de l'inéquation dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

Pour tout réel *x* de cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} &\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11) \\ \Leftrightarrow\ &\ln\left[(x+3)(x+2)\right]=\ln(x+11) \\ \Leftrightarrow\ &(x+3)(x+2)=x+11 \\ \Leftrightarrow\ &x^2+5x+6=x+11 \\ \Leftrightarrow\ &x^2+4x-5=0 \end{aligned}$$

La somme des coefficients du trinôme x^2+4x-5 étant nulle, 1 est solution évidente de l'équation $x^2+4x-5=0$ et on a facilement : $x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5)=0$.

Les solutions de l'équation $x^2+4x-5=0$ sont 1 et -5. Comme cette deuxième valeur n'appartient pas à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, on conclut finalement que l'équation $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$ admet 1 comme unique solution.

$$\boxed{\mathscr{S}=\{1\}}$$

b) $\ln x+\ln(x-3)=2\ln 2$.

Pour que les logarithmes soient définis, il faut que *x* vérifie :

$$\begin{cases} x>0 \\ x-3>0 \end{cases}$$

Or, on a :

$$\begin{cases} x>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$$

On cherche donc les éventuelles solutions de l'inéquation dans l'intervalle $]3\,;+\infty[$.

Pour tout réel *x* de cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} &\ln x+\ln(x-3)=2\ln 2 \\ \Leftrightarrow\ &\ln\left[x(x-3)\right]=\ln 2^2 \\ \Leftrightarrow\ &x(x-3)=2^2 \\ \Leftrightarrow\ &x^2-3x=4 \\ \Leftrightarrow\ &x^2-3x-4=0 \end{aligned}$$

On peut constater que -1 est racine … ou calculer le discriminant. Dans les deux cas, on obtient comme solutions de l'équation $x^2-3x-4=0$: -1 et 4. Seule la seconde valeur appartient à l'intervalle $]3\,;+\infty[$ et on en conclut finalement que l'équation $\ln x+\ln(x-3)=2\ln 2$ admet 4 comme unique solution.

$$\boxed{\mathscr{S}=\{4\}}$$

c) $\ln(2x+3)+2\ln(x-1)=\ln(x+3)$.

Pour que les logarithmes soient définis, il faut que x vérifie :

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

Or, on a :

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{3}{2} \\ x>1 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

On cherche donc les éventuelles solutions de l'inéquation dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de cet intervalle, on a :

$$\begin{gathered} \ln(2x+3)+2\ln(x-1)=\ln(x+3) \\ \Leftrightarrow \ln(2x+3)+\ln(x-1)^2=\ln(x+3) \\ \Leftrightarrow \ln\left[(2x+3)(x-1)^2\right]=\ln(x+3) \\ \Leftrightarrow (2x+3)(x-1)^2=x+3 \\ \Leftrightarrow (2x+3)(x^2-2x+1)=x+3 \\ \Leftrightarrow 2x^3-x^2-4x+3=x+3 \\ \Leftrightarrow 2x^3-x^2-5x=0 \\ \Leftrightarrow x(2x^2-x-5)=0 \end{gathered}$$

La valeur 0 est solution immédiate de la dernière équation mais n'appartient pas à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

On résout alors : $2x^2-x-5=0$.

Le discriminant associé vaut : $(-1)^2-4\times2\times(-5)=1+40=41$.

D'où les racines : $\dfrac{-(-1)-\sqrt{41}}{2\times2}=\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}$ et $\dfrac{-(-1)+\sqrt{41}}{2\times2}=\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$.

Seule la deuxième racine appartient à $]1\,;+\infty[$ et on en conclut finalement que l'équation $\ln(2x+3)+2\ln(x-1)=\ln(x+3)$ admet comme unique solution : $\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right\}}$$

N°59 page 131

a) $(\ln x)^2-\ln x-30=0$.

Pour que $\ln x$ existe, il faut et il suffit que x soit strictement positif.
On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$.

On pose : $X=\ln x$. Il vient alors : $(\ln x)^2-\ln x-30=0\Leftrightarrow X^2-X-30=0$.

Le discriminant associé vaut : $(-1)^2-4\times1\times(-30)=1+120=121=11^2$.
Cette équation admet donc deux racines : $\dfrac{-(-1)-11}{2}=\dfrac{1-11}{2}=-5$ et $\dfrac{-(-1)+11}{2}=\dfrac{12}{2}=6$.

On doit alors résoudre les deux équations : $\ln x=-5$ et $\ln x=6$.

$$\ln x=-5\Leftrightarrow x=e^{-5}\ \text{ et }\ \ln x=6\Leftrightarrow x=e^{6}$$

Finalement, l'équation $(\ln x)^2-\ln x-30=0$ admet deux solutions : e^{-5} et e^6.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{e^{-5}\,;e^{6}\right\}}$$

b) $(\ln x)^2+3\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=10$

Pour que $\ln x$ et $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ existent, il faut et il suffit que x soit strictement positif.
On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel x strictement positif, l'équation se récrit : $(\ln x)^2-3\ln x-10=0$.

On pose : $X=\ln x$. Il vient alors : $(\ln x)^2-3\ln x-10=0\Leftrightarrow X^2-3X-10=0$.

Le discriminant associé vaut : $(-3)^2 - 4\times 1\times(-10) = 9+40 = 49 = 7^2$.

Cette équation admet donc deux racines : $\dfrac{-(-3)-7}{2} = \dfrac{3-7}{2} = -2$ et $\dfrac{-(-3)+7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$.

On doit alors résoudre les deux équations : $\ln x = -2$ et $\ln x = 5$.

$$\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} \text{ et } \ln x = 5 \Leftrightarrow x = e^5$$

Finalement, l'équation $(\ln x)^2 - \ln x - 30 = 0$ admet deux solutions : e^{-2} et e^5.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{e^{-2}\,;\,e^5\right\}}$$

N°63 page 131

Notons tout d'abord que nous cherchons les solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel x strictement positif on pose : $X = \ln x$. Il vient alors :

$$(\ln x)^2 - 5\ln x < 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X < 0 \Leftrightarrow X(X-5) < 0 \Leftrightarrow X \in]0\,;5[\Leftrightarrow 0 < X < 5$$

D'où, en revenant à la variable initiale :

$$0 < X < 5 \Leftrightarrow 0 < \ln x < 5 \Leftrightarrow e^0 < x < e^5 \Leftrightarrow 1 < x < e^5 \Leftrightarrow x \in]1\,;e^5[$$

$$\boxed{\mathscr{S} =]1\,;e^5[}$$

N°73 page 131

Nous pouvons dériver la fonction proposée en tant que rapport de deux fonctions ou comme un produit. Nous traitons les deux approches :

Avec $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$, il vient, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Avec $f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=\ln x$ et $v(x)=\frac{1}{x}$, il vient, pour tout réel *x* strictement positif :

$$f'(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+\ln x\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}}$$

N°75 page 131

On rappelle la formule classique pour une fonction f dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I : $\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$.

Avec la fonction logarithme népérien, qui ne s'annule pas sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, on obtient immédiatement :

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$\boxed{\forall x\in\left]+1;+\infty\right[,\ f'(x)=-\frac{1}{x(\ln x)^2}}$$

N°80 page 132

Soit *a* un réel quelconque strictement positif.

On considère le point $\mathrm{A}(a\,;\ln a)$ sur $\mathscr{C}$. En ce point, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction logarithme népérien admet une tangente D_a d'équation :

$$y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln a=\frac{x}{a}+\ln a-1$$

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D_a, on étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ le signe de la différence :

$$d(x)=\frac{x}{a}+\ln a-1-\ln x$$

La fonction *d* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme différence de deux fonctions définies et dérivables sur cet intervalle : la fonction affine $x \mapsto \frac{x}{a} + \ln a - 1$ et la fonction logarithme népérien. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$d'(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{ax}$$

Les réels *a* et *x* étant strictement positifs, le signe de $d'(x)$ est donc celui de son numérateur. On a donc immédiatement :

- Si $x \in]0\,;a[$, on a $x - a < 0$ et la dérivée d' est strictement négative : *d* est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- $d'(a) = 0$.
- Si $x \in]a\,;+\infty[$, on a $x - a > 0$ et la dérivée d' est strictement positive : d est strictement croissante.

On déduit de ce qui précède que la fonction *d* admet un minimum global en *a*. Elle prend en a la valeur 0 ($\mathscr{C}$ et D_a passent toutes deux par le point A !) et on a en définitive :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ d(x) \geq 0$$

On en déduit alors que la courbe $\mathscr{C}$ est située sous la tangente D_a. Puisque cette conclusion est valable pour un réel strictement positif *a* quelconque, il vient finalement :

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction logarithme népérien est située sous n'importe laquelle de ses tangentes.

N°83 page 132

a) Puisque la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(1\,;2)$, on a : $g(1) = 2$.
Or, $g(1) = a \times 1 + b \ln 1 = a + b \times 0 = a$.
Il vient donc immédiatement : $\boxed{a = 2}$.

La droite d'équation $y = x$ admet pour coefficient directeur : 1.
La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction linéaire $x \mapsto ax$ et la fonction $x \mapsto b \ln x$). La tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathrm{A}(1\,;2)$ admet pour coefficient directeur : $g'(1)$.
Les droites considérées sont parallèles si, et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux : $g'(1) = 1$.

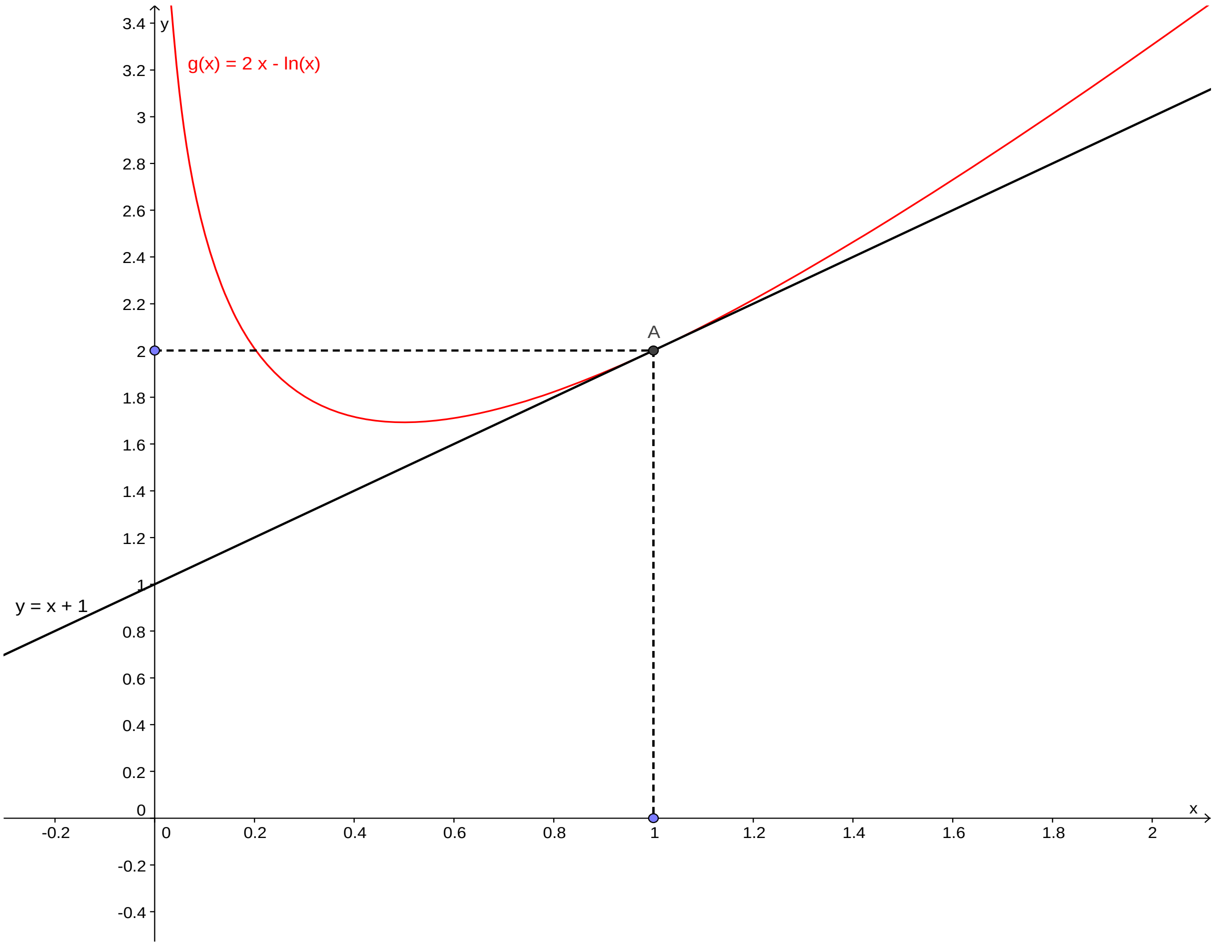
Or, pour tout x réel strictement positif, on a : $g'(x) = a + \frac{b}{x} = 2 + \frac{b}{x}$

Il vient donc : $g'(1) = 1 \Leftrightarrow 2 + \frac{b}{1} = 1 \Leftrightarrow \boxed{b = -1}$.

La fonction g est la fonction définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = 2x - \ln x}$$

b) La tangente T admet une équation réduite de la forme : $y = x + c$. Comme elle passe par le point $\mathrm{A}(1\,;2)$, il vient immédiatement : $c = 1$.



N°92 page 133

→ Limite en $-\infty$

On a d'abord : $\lim\limits_{x\to+-\infty}(1-2x)=\lim\limits_{x\to+-\infty}(-2x)=+\infty$.
Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
On en déduit alors (composition) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-2x)=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\ln(1-2x)=+\infty}$$

→ Limite en $\dfrac{1}{2}$ à gauche.

Comme pour tout x réel de l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$, on a $1-2x>0$, il vient :
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2},x<\frac{1}{2}}(1-2x)=0^+$.
Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to0,x>0}\ln x=-\infty$.
On en déduit alors (composition) : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2},x<\frac{1}{2}}\ln(1-2x)=-\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2},x<\frac{1}{2}}\ln(1-2x)=-\infty}$$

N°93 page 133

On a immédiatement : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
On en déduit alors (composition) : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(x^2+x+1\right)=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^2+x+1\right)=+\infty}$$

N°102 page 133

1. La fonction f est d'abord définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0 : $]-3\,;3[$.

Ensuite, on a :

$$\forall x \in \left]-3\,;3\right[,\ f(-x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{3-x}{3+x}}\right) = -\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = -f(x)$$

Ainsi, la fonction *f* est impaire sur $\left]-3\,;3\right[$. On en déduit immédiatement :

L'origine du repère est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

2. On s'intéresse d'abord à la limite de *f* en -3 à droite.
   On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} (3+x) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} (3-x) = 6$.

   D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} \frac{3+x}{3-x} = 0^+$ puis (composition) : $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = -\infty$.

   En tenant compte du résultat obtenu à la première question (*f* impaire), il vient immédiatement : $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ x>-3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x) = +\infty$

3. a. La fonction *f* est de la forme $\ln g$. On aura donc : $f' = (\ln g)' = \frac{g'}{g}$.

   Or, pour tout réel *x* de $\left]-3\,;3\right[$: $g'(x) = \frac{1\times(3-x)-(3+x)\times(-1)}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$.

   D'où : $\forall x \in \left]-3\,;3\right[,\ f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{6}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{6}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{3+x} = \frac{6}{(3-x)(3+x)}$.

$\forall x \in \left]-3\,;3\right[,\ f'(x) = \frac{6}{(3-x)(3+x)}$

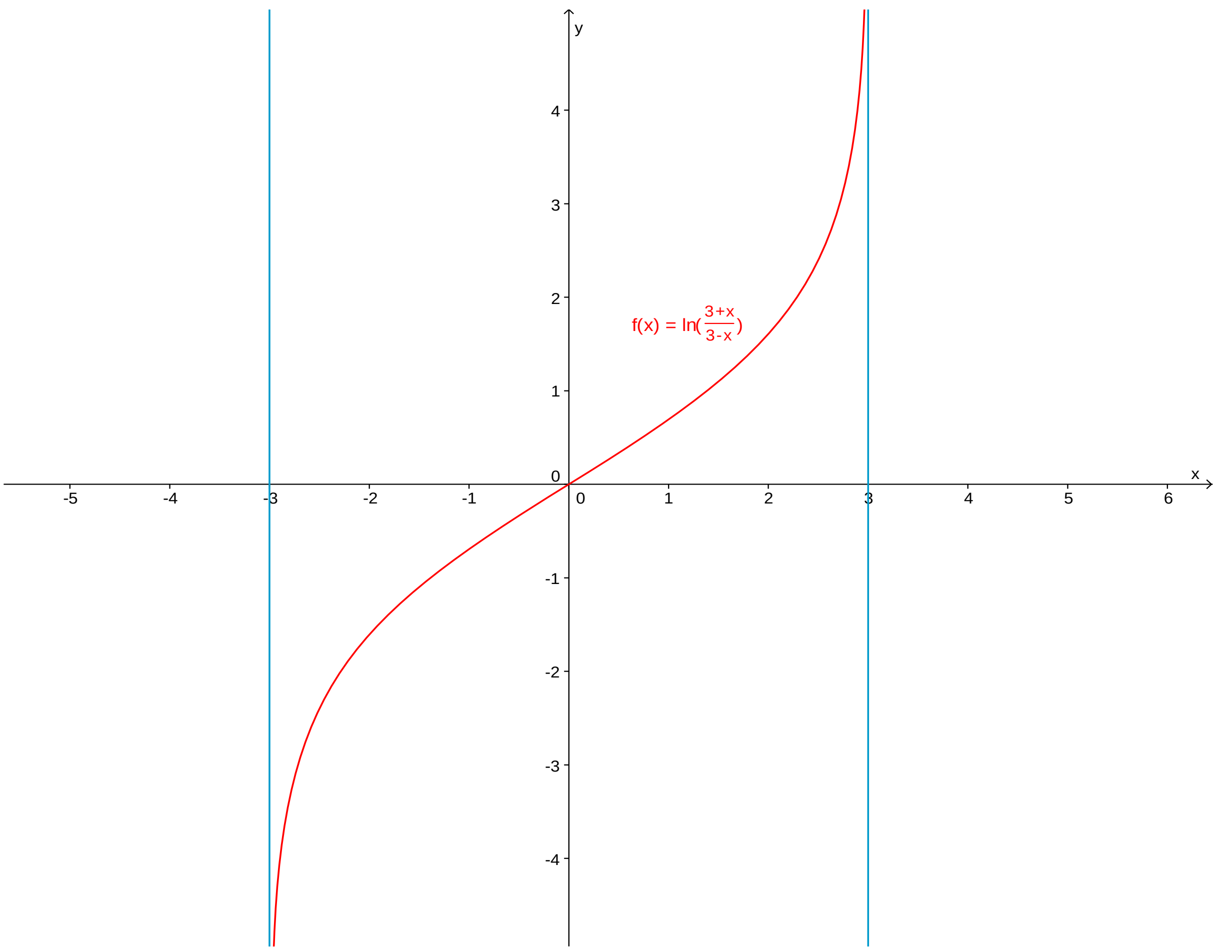
   b. Pour tout *x* réel dans $\left]-3\,;3\right[$, on a : $(3-x)(3+x) > 0$. On en déduit immédiatement : $\forall x \in \left]-3\,;3\right[,\ f'(x) > 0$ puis :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-3\,;3\right[$.

4. a. En tenant compte des éléments précédents, on a :

x	-3		3
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Nous fournissons ci-dessous la courbe demandée. Nous avons fait apparaître les deux asymptotes verticales d'équations : $x = -3$ et $x = 3$.



N°104 page 133

1. Etudions la limite de *f* en 0 à droite.

   On a d'abord : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+1)=1$, d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x+1}{x}=+\infty$.

   Comme $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$, on en déduit (composition) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=+\infty$.

   Finalement (somme) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=+\infty$.

   Etudions maintenant la limite de *f* en $+\infty$.

   On a d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$.

   Comme $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=\ln 1=0$, on en déduit (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=0$.

   Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

   Finalement (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=0$.

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

2. a. la fonction $\varphi : x\mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est de la forme $\ln g$ et sa dérivée s'écrira donc : $\varphi'=\frac{g'}{g}$.

   Or : $\forall x\in\left]0\,;+\infty\right[,\ g'(x)=\frac{1\times x-(x+1)\times 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$ (remarque : on peut aussi obtenir ce résultat rapidement en notant que l'on a $\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$).

   D'où : $\varphi' : x\mapsto \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=-\frac{1}{x^2}\times\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{x(x+1)}$.

   On a alors : $f'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-(x+1)+x}{x^2(x+1)^2}=\frac{-1}{x^2(x+1)^2}$.

$$\boxed{\forall x\in\left]0\,;+\infty\right[,\ f'(x)=\frac{-1}{x^2(x+1)^2}}$$

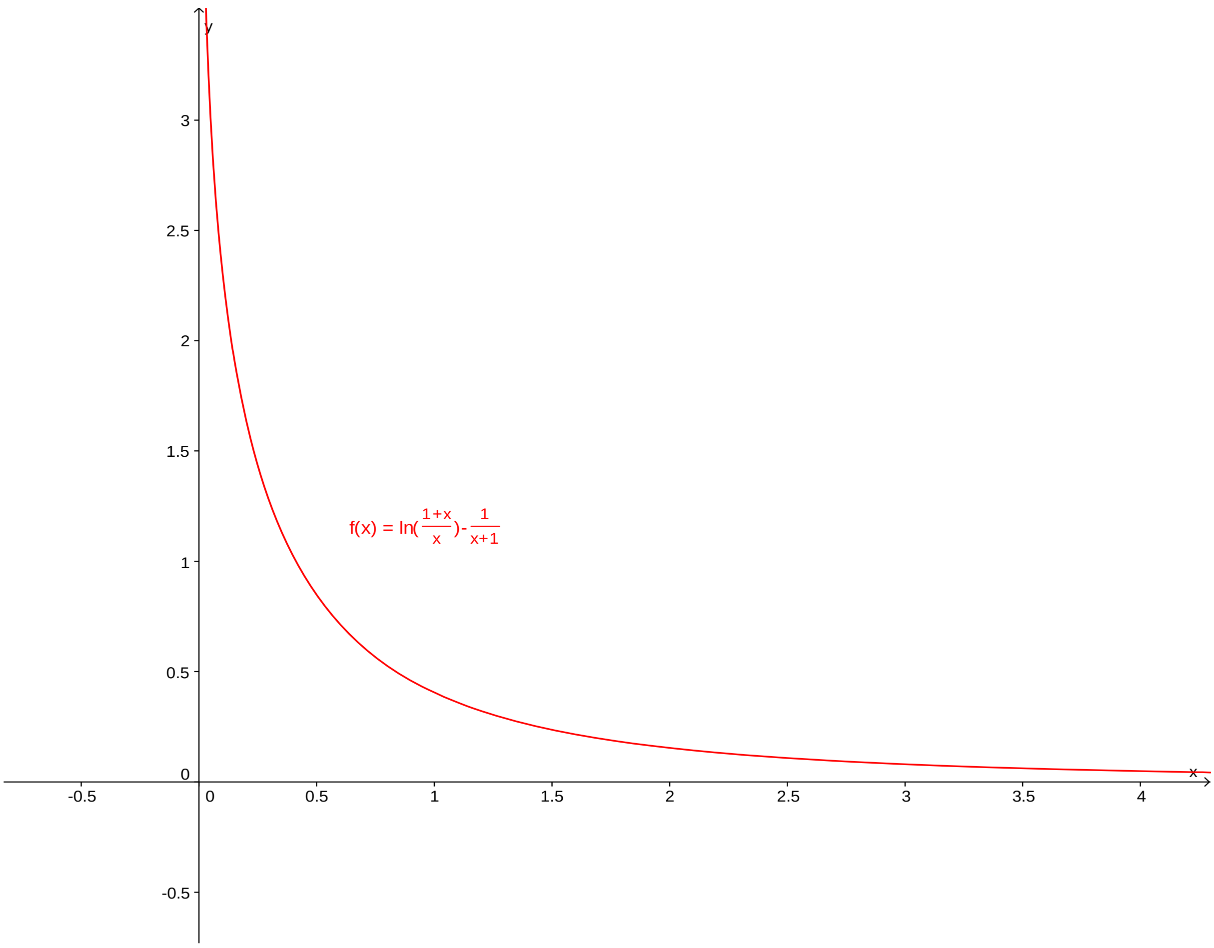
b. Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, on a : $x^2(x+1)^2>0$. D'où : $\forall x\in]0\,;+\infty[,\ f'(x)<0$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. a. En tenant compte des éléments précédents, on a :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0 ‖

b.On obtient :



N°118 page 137

1. Rappelons le résultat classique : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

   Nous redonnons ci-après la démarche) suivre pour retrouver ce résultat.

   Pour tout *x* strictement positif, on a : $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1}$.
   Ainsi, la limite cherchée est-elle égale au nombre dérivé de la fonction logarithme népérien en 1, à savoir 1.

   Comme : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1=f(0)$, on en déduit :

La fonction *f* est continue en 0.

2. a) La fonction $x\mapsto 1+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle prend ses valeurs dans $[1\,;+\infty[\subset\mathbb{R}_+^*$. Or la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc, à fortiori, sur $[1\,;+\infty[$. En définitive, la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

   La fonction : $x\mapsto -\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur $\mathbb{R}_+$, en tant que fonction polynôme.

   On déduit de ce qui précède que la fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

   Pour tout *x* réel positif on a alors :

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\left(1-x+x^2\right)=\frac{1-(1+x)\left(1-x+x^2\right)}{1+x}=\frac{1-\left(1+x^3\right)}{1+x}=-\frac{x^3}{1+x}$$

   Pour tout *x* réel strictement positif, on a : $-x^3<0$ et $1+x>0$, soit : $g'(x)<0$. Par ailleurs, on a : $g'(0)=0$.
   On déduit de ce qui précède que la fonction *g* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

b) On considère cette fois la fonction *h* définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$h : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

En raisonnant comme précédemment, on établit que *h* est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout *x* réel positif, on a :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x} = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

Pour tout *x* réel strictement positif, on a : $x^2 > 0$ et $1+x > 0$, soit : $h'(x) > 0$. Par ailleurs, on a : $h'(0) = 0$.
On déduit de ce qui précède que la fonction *h* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}}$$

c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Pour tout réel x <u>strictement positif</u>, on obtient alors :

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)-x\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ -\frac{1}{2}\leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}}$$

d) Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x}=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

L'encadrement obtenu à la question précédente se récrit donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ -\frac{1}{2}\leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

Or, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. Le théorème des gendarmes nous permet alors d'écrire :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable en 0 et on a : } f'(0)=-\frac{1}{2}.}$$

N°121 page 138

A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$$

1. a) On peut simplifier le calcul en remarquant que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a (attention ! Le fait que l'on ait $x>0$ est déterminant.) :

$$g(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}=\ln\left(x^2+1\right)-\ln x^2-\frac{2}{x^2+1}=\ln\left(x^2+1\right)-2\ln x-\frac{2}{x^2+1}$$

Il vient alors :

$$g'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x}+\frac{2\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\left(x^2+1+2\right)-\frac{2}{x}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{2}{x}$$

$$=2\left[\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}-\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x\left(x^2+1\right)^2}\right]=2\frac{\cancel{x^4}+3x^2\cancel{-x^4}-2x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=2\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, on a : $g'(x)=2\dfrac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

b) Comme le dénominateur de $g'(x)$ est le produit de deux facteurs strictement positifs, il est strictement positif. Comme : $x^2-1=(x-1)(x+1)$, le signe de $g'(x)$ est identique à celui de $(x-1)(x+1)$. Sur $]0\,;+\infty[$, le facteur $x+1$ est strictement positif.
Le signe de $g'(x)$ est identique à celui de $x-1$.

On a donc, finalement :

- Si $x\in\,]0\,;1[$, $g'(x)<0$;
- Si $x>1$, $g'(x)>0$;
- $g'(1)=0$.

La fonction g admet donc un minimum pour $x=1$.

2. Déterminons maintenant les limites de la fonction g au bornes de $\left]0\,;+\infty\right[$.

➔ Limite en 0 à droite.

On a classiquement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Alors, par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{X\to +\infty} \ln X = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(x^2+1\right) = 1$. D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2}{x^2+1} = -2$.

Finalement, par addition :

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g\left(x\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}\right] = +\infty}$$

➔ Limite en $+\infty$

On a classiquement : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$. On en déduit : $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Alors, par composition : $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-2}{x^2+1} = 0^-$.

Finalement, par addition :

$$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g\left(x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}\right] = 0}$$

3. a) Nous pouvons, avant de dresser le tableau de variation de g, compléter les éléments précédents en précisant la valeur prise par la fonction pour $x=1$:

$$g\left(1\right) = \ln\left(1+\frac{1}{1^2}\right) - \frac{2}{1^2+1} = \ln 2 - 1$$

On a alors :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	$-$		$+$	
g	$\parallel$	$+\infty$ $\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	0

b) La fonction g est continue sur l'intervalle $]0\,;1]$ en tant que fonction dérivable sur cet intervalle. D'après la question 1.b), elle y est strictement décroissante.
Enfin, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty$ et $g(1) = \ln 2 - 1 < 0$.
La théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure qu'il existe un unique réel α dans $]0\,;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Si la fonction g s'annulait en une autre valeur strictement positive α' (appartenant cette fois à l'intervalle $]1\,;+\infty[$), on ne pourrait avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Pour rappel, on établit ce résultat en raisonnant par l'absurde : si $g(\alpha') = 0$ alors, g étant strictement croissante, on a en $x_0 > \alpha'$: $g(x_0) > 0$ et, pour tout x réel dans $]x_0\,;+\infty[$: $g(x) > g(x_0)$. On aurait alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \geq g(x_0) \neq 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha \text{ strictement positif tel que } g(\alpha) = 0.}$$

On obtient à la calculatrice :

$$g(0,5) = \ln\left(1 + \frac{1}{0,5^2}\right) - \frac{2}{0,5^2+1} \simeq 0,009 \text{ et } g(0,6) = \ln\left(1 + \frac{1}{0,6^2}\right) - \frac{2}{0,6^2+1} \simeq -0,141$$

On en déduit :

$$\boxed{0,5 < \alpha < 0,6}$$

4. D'après ce qui précède, on a :

   - Si $x \in]0\,;\alpha[$, g est strictement décroissante et $g(x) > g(\alpha)$, soit $g(x) > 0$. La fonction g prend des valeurs strictement positives sur $]0\,;\alpha[$.

- Si $\alpha < x \leq 1$, g est strictement décroissante et $g(\alpha) > g(x) \geq g(1)$, soit : $0 > g(x) \geq \ln 2 - 1$. La fonction g prend des valeurs strictement négatives sur $]\alpha\,;1]$.
- Si $x \geq 1$, g est strictement croissante et on a $g(x) \geq \ln 2 - 1$. La fonction g tend vers 0 sans s'annuler une seconde fois (cf. ci-dessus), elle prend donc des valeurs strictement négatives sur $]1\,;+\infty[$.

En définitive :

- Si $x \in]0\,;\alpha[$, g est strictement positive ;
- $g(\alpha) = 0$;
- Si $x \in]\alpha\,;+\infty[$, g est strictement négative.

A. Etude de la fonction *f*

1. Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ est dérivable en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle et prend des valeurs strictement positives. Par ailleurs, le logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$. On en déduit, par composition, que la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

   On en déduit alors que la fonction *f* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

   On a alors, pour tout réel *x* strictement positif :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1\times\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + x\times\frac{\frac{-2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\frac{-2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2}{x^2+1} = g(x)
\end{aligned}$$

On a bien le résultat demandé.

2. a) Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$xf\left(x\right)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

Ainsi, sur $\left]0\,;+\infty\right[$, la fonction $x\mapsto xf\left(x\right)$ apparaît comme la composée de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ et de la fonction $X\mapsto\frac{\ln\left(1+X\right)}{X}$. D'où le changement de variable suggéré.
Quand x tend vers $+\infty$, la variable h tend vers 0 (par valeurs positives).

On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[xf\left(x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{\ln\left(1+h\right)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{\ln\left(1+h\right)-\ln1}{h}$$

Cette limite n'est rien d'autre que le nombre dérivé de la fonction logarithme népérien en 1 et vaut donc : 1.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[xf\left(x\right)\right]=1}$$

b) D'après la question précédente : $\lim_{x\to+\infty}\left[xf\left(x\right)\right]=1$. Par ailleurs, on a le résultat classique : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. On en déduit alors, par produit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\times xf\left(x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0\times1=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0}$$

3. **Etude de *f* en 0**

a) Pour tout x strictement positif, on a : $\ln x^2=2\ln x$. D'où :

$$f\left(x\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x\ln\frac{x^2+1}{x^2}=x\left[\ln\left(x^2+1\right)-\ln x^2\right]$$
$$=x\left[\ln\left(x^2+1\right)-2\ln x\right]=x\ln\left(x^2+1\right)-2x\ln x$$

Pour tout réel x strictement positif : $f(x) = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x\ln x$.

b) Pour établir la continuité de *f* en 0 (sous-entendu à droite, la fonction *f* n'étant pas définie à gauche de cette valeur), il suffit d'établir : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$.

Or on a, en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[x\ln\left(x^2+1\right) - 2x\ln x\right]$$

On a facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(x^2+1\right) = \ln 1 = 0$ et, de fait : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[x\ln\left(x^2+1\right)\right] = 0\times\ln 1 = 0$.

Par ailleurs, d'après l'énoncé : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\ln x\right) = 0$.

Finalement on a , par différence :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[x\ln\left(x^2+1\right) - 2x\ln x\right] = 0 - 0 = 0 = f(0)$$

La fonction *f* est continue en 0.

c) On doit étudier : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x\ln\left(x^2+1\right) - 2x\ln x}{x} = \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln x$$

Comme : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(x^2+1\right) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, il vient : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$.

On en tire :

La fonction *f* n'est pas dérivable en 0.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ admet une tangente verticale en O.

4. a) On a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right) - \dfrac{2}{\alpha^2+1} = 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right) = \dfrac{2}{\alpha^2+1}$.

Il vient alors : $f(\alpha)=\alpha\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

$$\boxed{f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}$$

b) Considérons la fonction $\varphi : x\mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ sur $]0\,;+\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle et on a facilement : $\varphi'(x)=2\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$. On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $]0\,;1[$ (qui est un intervalle nous intéressant puisque l'on a : $0,5<\alpha<0,6$).

On a donc :

$$0,5<\alpha<0,6\Leftrightarrow\varphi(0,5)<\varphi(\alpha)<\varphi(0,6)\Leftrightarrow$$

$$\frac{2\times 0,5}{0,5^2+1}<f(\alpha)<\frac{2\times 0,6}{0,6^2+1}\Leftrightarrow\frac{2\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}<f(\alpha)<\frac{2\times\frac{3}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^2+1}\Leftrightarrow$$

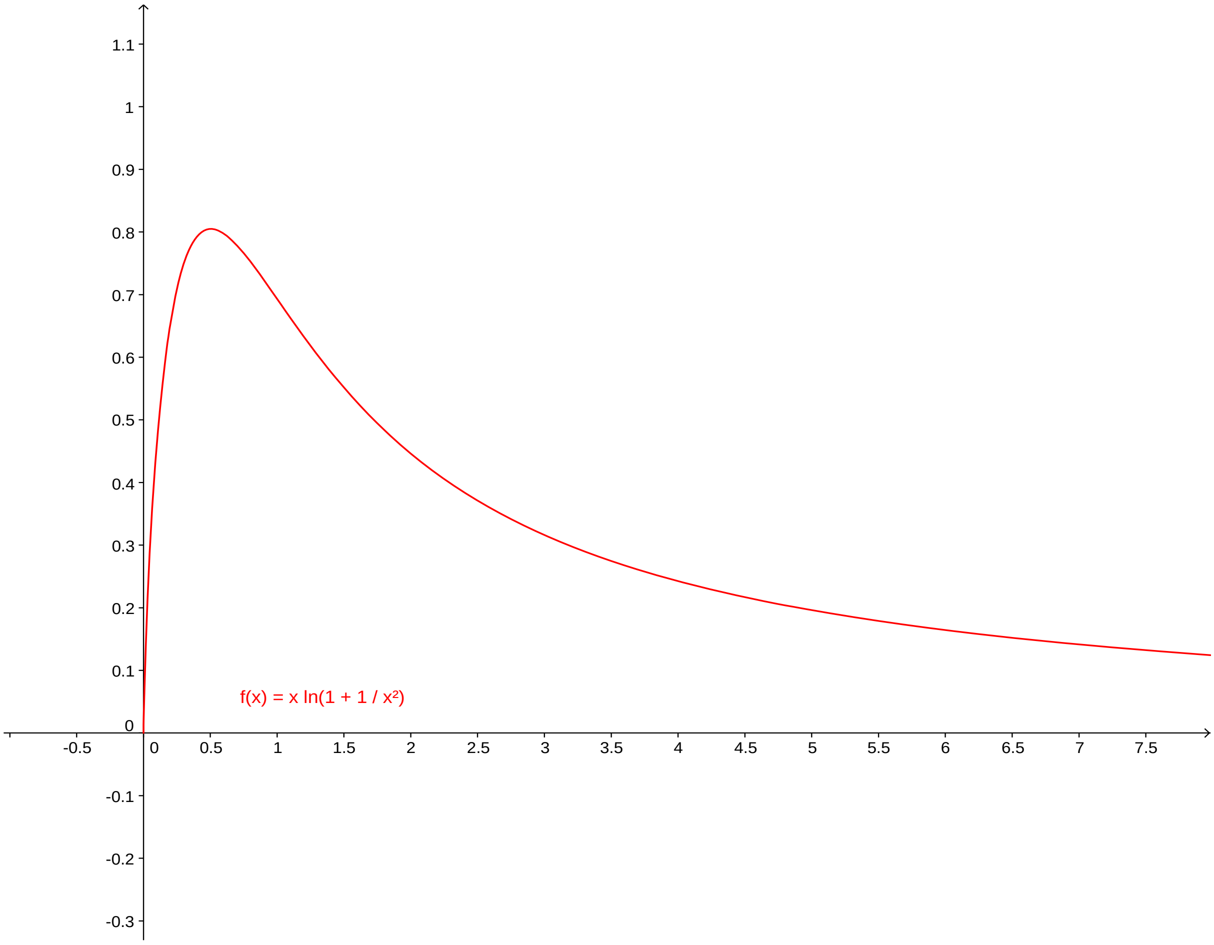
$$\frac{1}{\frac{1}{4}+1}<f(\alpha)<\frac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{25}+1}\Leftrightarrow\frac{4}{5}<f(\alpha)<\frac{15}{17}$$

$$\boxed{\frac{4}{5}<f(\alpha)<\frac{15}{17}}$$

5. A partir des éléments précédents, on obtient :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$	$\searrow$	0

Voir le tracé ci-après.



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

N°122 page 138

1. Remarquons d'abord que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 \geq 1 > 0$ et donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1} > 0$.

   On en déduit que pour tout réel x positif : $x+\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2+1} > 0$.

   Supposons donc maintenant que x est strictement négatif. Il en va alors de même pour l'expression conjuguée : $x-\sqrt{x^2+1}$.

   D'où :

$$x+\sqrt{x^2+1} = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

Comme $x-\sqrt{x^2+1}<0$, on a immédiatement $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}>0$.

Le résultat est finalement établi.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ x+\sqrt{x^2+1}>0}$$

2. a) La fonction $x\mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
Elle prend ses valeurs dans $[1\,;+\infty[$. Or la fonction racine carrée est dérivable sur cet intervalle puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Par composition, on en déduit que la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Il en va de même pour la fonction $x\mapsto x$.
La fonction $x\mapsto x+\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
D'après la question précédente, cette fonction prend des valeurs strictement positives.

On en déduit finalement que la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel *x*, posons alors : $\varphi(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. On a alors :

$$f'(x)=(\ln\varphi)'(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Or :

$$\varphi'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

D'où : $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Finalement :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

b) Comme on a, pour tout *x* réel, $\sqrt{x^2+1}>0$, il vient : $f'(x)>0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

3. a) On cherche $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$. D'où : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$.
Alors, par addition : $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

b) Pour tout x réel, on a :

$$f(-x)=\ln\left[-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right]=\ln\left[-x+\sqrt{x^2+1}\right]=\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$
$$=\ln\left[\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=\ln\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=-\ln\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]$$
$$=-f(x)$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=-f(x)}$$

c) On a alors, en utilisant le résultat des deux questions précédentes et en posant $X=-x$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{X\to+\infty}f(-X)=\lim_{X\to+\infty}\left[-f(X)\right]=-\lim_{X\to+\infty}f(X)=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$$

4. a) Les éléments précédents nous donnent :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) On sait que dans un repère orthonormal, l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de toute fonction impaire.

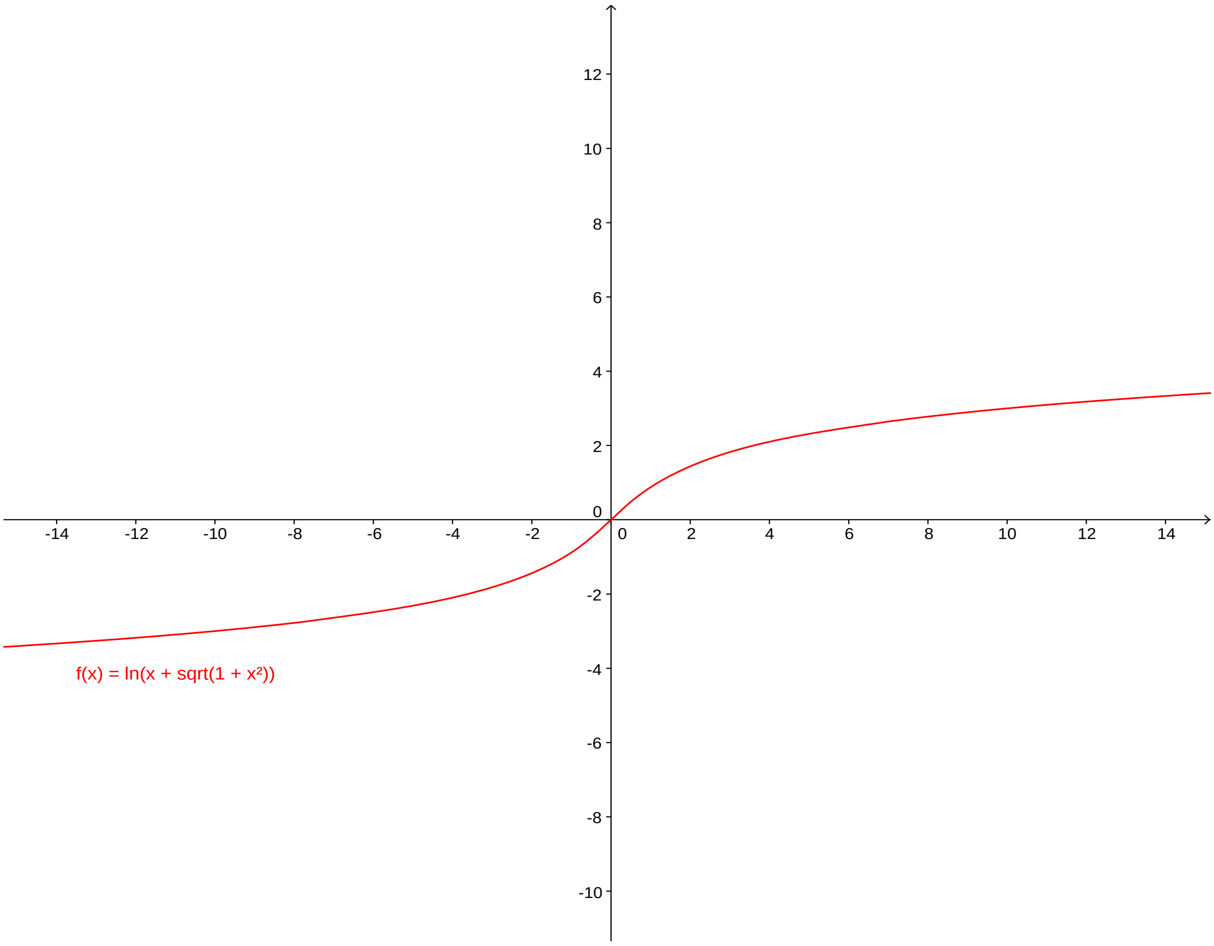
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, à la question 3 b) nous avons établi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.

On déduit de ces deux éléments que la fonction *f* est impaire.

Dans un repère orthonormal, l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f*.

c) On obtient :



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Un complément : lorsque *x* est « grand » la courbe ci-dessus nous fait étrangement penser à celle du logarithme népérien … Non ? C'est effectivement le cas et, pour nous en convaincre, nous allons formaliser un peu le fait que pour *x* « grand », la racine carrée de x^2+1 prend des valeurs très proches de *x* …

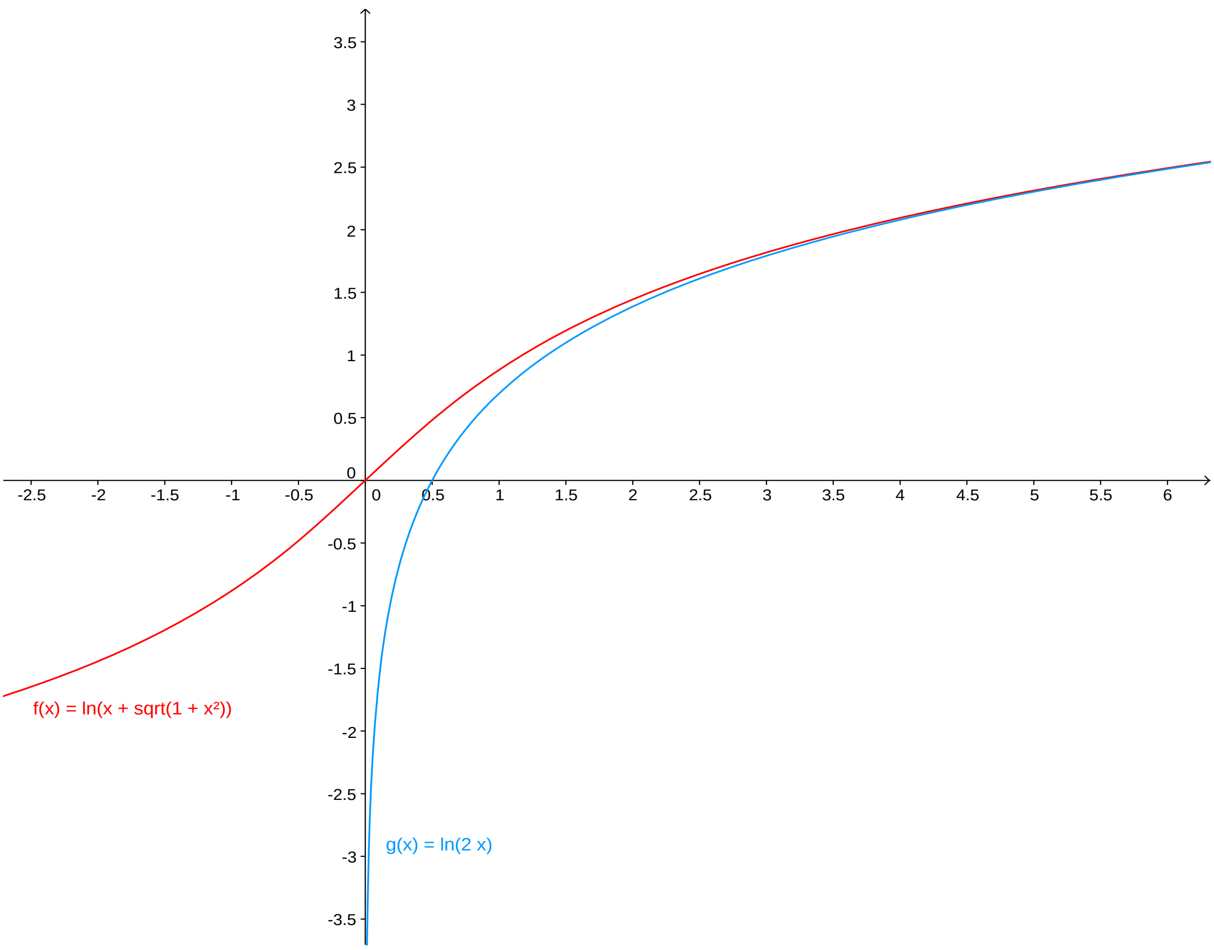
Pour x strictement positif, on a :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(x + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= \ln\left[x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

On a facilement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \ln 2$.

On en tire alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \ln x\right] = \ln 2$.

Ainsi, notre calcul établit que pour x « grand », la fonction f est proche de la fonction $x \mapsto \ln x + \ln 2$ (ou $x \mapsto \ln(2x)$ si vous préférez …). Nous faisons apparaître la courbe représentative de cette fonction sur le graphique précédent :



Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ *et* $x \mapsto \ln(2x)$.

N°128 page 139

Soit y fixé strictement positif.

Soit alors la fonction φ qui, à tout x strictement positif, associe :

$$\varphi(x) = (x+y)\ln(x+y) - x\ln x - y\ln y$$

Remarque : soulignons, avant de poursuivre, que cette expression de comporte plus qu'une seule variable : x.

La fonction φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle ($x \mapsto (x+y)\ln(x+y)$ et $x \mapsto -x\ln x - y\ln y$).

Pour tout réel x strictement positif, on a alors :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 1\times\ln(x+y) + (x+y)\times\frac{1}{x+y} - 1\times\ln x - x\times\frac{1}{x} - 0\\ &= \ln(x+y) + 1 - \ln x - 1\\ &= \ln(x+y) - \ln x\\ &= \ln\frac{x+y}{x}\\ &= \ln\left(1+\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

Comme $x>0$ et $y>0$, on a $1+\frac{y}{x}>1$ et, de fait : $\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)>0$.
On en déduit que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $\varphi'(x)>0$.
La fonction φ est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

On a par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+y)\ln(x+y) = y\ln y$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ (cf. le cours « croissances comparées »). D'où :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\varphi(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[(x+y)\ln(x+y) - x\ln x - y\ln y\right] = y\ln y - y\ln y = 0$$

On déduit classiquement de ce qui précède (croissance stricte et limite nulle à droite de 0) que la fonction φ prend des valeurs strictement positives pour tout x de $]0\,;+\infty[$ (raisonnement pas l'absurde en supposant qu'il existe x_0 dans $]0\,;+\infty[$ tel que $\varphi(x_0)\le 0$. Si $\varphi(x_0)<0$ on en tire alors que pour tout x de $]0\,;x_0[$, on a $\varphi(x)<\varphi(x_0)$ ce qui empêche d'avoir la limite nulle … L'autre possibilité, $\varphi(x_0)=0$, se ramène facilement à la première.).

On a donc, pour tout x de $]0\,;+\infty[$: $\varphi(x)>0$, c'est-à-dire :

$$(x+y)\ln(x+y)-x\ln x-y\ln y>0$$

Soit encore :

$$(x+y)\ln(x+y)>x\ln x+y\ln y$$

Comme ce résultat est valable pour y quelconque dans $]0\,;+\infty[$, on a finalement cette inégalité pour n'importe quel couple de réels strictement positifs x et y. Le résultat est ainsi établi (remarque : sous une forme plus forte que celle suggérée par l'énoncé puisque nous avons obtenu une inégalité stricte …).

$\boxed{\text{N°130 page 139}}$

Rappelons que pour un nombre strictement positif x le nombre de chiffres de l'écriture décimale de x vaut : $\mathrm{E}(\log x)+1$ (voir, par exemple, l'exercice résolu 1 page 125).

Ici, on a : $\mathrm{E}(\log x)+1=\mathrm{E}\left[\log\left(2^{86243}-1\right)\right]+1$.

La calculatrice ne permet pas de déterminer une valeur approchée du nombre $\log\left(2^{86243}-1\right)$, l'entier $2^{86243}-1$ étant … gigantesque !

En revanche, cet entier étant proche de 2^{86243}, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\log\left(2^{86243}-1\right)&=\frac{\ln\left(2^{86243}-1\right)}{\ln 10}\\&=\frac{\ln\left[2^{86243}\left(1-2^{-86243}\right)\right]}{\ln 10}\\&=\frac{\ln 2^{86243}+\ln\left(1-2^{-86243}\right)}{\ln 10}\\&=\frac{86243\ln 2+\ln\left(1-2^{-86243}\right)}{\ln 10}\\&=\frac{86243\ln 2}{\ln 10}+\frac{\ln\left(1-2^{-86243}\right)}{\ln 10}\end{aligned}$$

A la calculatrice, on a facilement : $\dfrac{86243\ln 2}{\ln 10}\simeq 25\,961{,}73$.

Par ailleurs, le nombre 2^{-86243} étant très (vraiment très !) petit, on a : $\ln\left(1-2^{-86243}\right) \simeq -2^{-86243}$

et il vient : $\dfrac{86243\ln 2}{\ln 10}+\dfrac{\ln\left(1-2^{-86243}\right)}{\ln 10} \simeq 25\ 961{,}73$.

D'où : $\mathrm{E}\left[\log\left(2^{86243}-1\right)\right]+1 = 25\ 961+1 = 25\ 962$.

L'écriture décimale de l'entier $2^{86243}-1$ compte un total de 25 962 chiffres.

C'est une quantité colossale !

Pour que vous preniez (un peu …) conscience de l'énormité de l'entier $2^{86243}-1$, nous pouvons considérer deux grandeurs tirées du monde physique :

- 15 milliards d'années terrestres (c'est-à-dire une valeur arrondie de l'âge de l'univers) correspondent à environ 5×10^{17} secondes : un « 5 » suivi de 17 « 0 » … Nous parlons-là d'un nombre dont l'écriture décimale comporte … 18 chiffres !
- Le nombre d'atomes de l'univers est aujourd'hui estimé à 10^{80} (que l'ordre de grandeur soit, dans les faits, 1 000 ou 1 000 000 fois plus élevé ou plus faible ne change pas grand-chose à l'affaire !), c'est-à-dire un nombre dont l'écriture décimale comporte … 81 chiffres (un « 1 » suivi de 80 « 0 »). Le nombre 10^{80} est bien sûr très important (imaginez, ne serait-ce que le nombre d'atomes d'hydrogène contenu dans le cœur d'une seule étoile …) mais est extrêmement petit (pour ne pas dire négligeable …) par rapport au nombre $2^{86243}-1$ qui comporte, nous venons de le voir, 25 962 chiffres !

Au-delà de l'exercice …

Les nombres entiers de la forme 2^n-1 sont appelé « nombres de Mersenne » (en mémoire au français Marin Mersenne). Ils sont activement étudiés par les mathématiciens pour leurs propriétés et le fait que certains d'entre eux sont premiers.

On a, par exemple, la belle propriété suivante :

« Si 2^n-1 est premier alors *n* est premier »

(on démontre en fait facilement la contraposée à savoir que si *n* n'est pas premier alors 2^n-1 n'est pas premier)

On notera en revanche que la réciproque est fausse !
Par exemple, 11 est premier mais $2^{11}-1 = 2\ 047 = 23\times 89$.

Le nombre $2^{86243}-1$ est le 28$^{\text{ème}}$ nombre de Mersenne premier. Sa primalité fut établie en 1982 sur un supercalculateur américain CRAY.

Le plus grand nombre de Mersenne premier (il s'agit du 47ème et il a été découvert en 2008) est $2^{43\,112\,609}-1$. Son écriture décimale comporte 12 978 189 chiffres … Ca, vous savez désormais le trouver !

N°130 page 139

a) La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ est le rapport de deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[e\,;+\infty[$ (le dénominateur ne s'y annulant pas), elle est donc dérivable sur cet intervalle.

On a :

$$\forall x \in [e\,;+\infty[,\ \varphi'(x) = \frac{1\times\ln x - x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

On a : $\varphi'(e) = \dfrac{\ln e - 1}{(\ln e)^2} = 0$.

Par ailleurs : $\forall x \in]e\,;+\infty[$, $\ln x > \ln e = 1$, d'où : $\varphi'(x) > 0$.

On en déduit :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \frac{x}{\ln x} \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [e\,;+\infty[\,.}$$

b) Notons d'abord que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

Par ailleurs, on a : $\varphi(e) = \dfrac{e}{\ln e} = e$. Comme la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $[e\,;+\infty[$, on en déduit : $\forall x \in]e\,;+\infty[,\ \varphi(x) > e$.

Les deux remarques précédentes vont nous permettre de montrer (par récurrence) que la suite (u_n) est minorée par e : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > e$.

Le résultat est vrai pour $n = 0$ puisque, par hypothèse : $u_0 = a > e$.

Supposons alors que l'on ait : $u_n > e$.
On a alors $u_{n+1} = \varphi(u_n) > e$ (d'après la remarque faite sur φ ci-dessus).

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > e$.

On a ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > e \Rightarrow \ln u_n > 1 \Rightarrow \frac{u_n}{\ln u_n} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$.

On en déduit ainsi que la suite (u_n) est strictement décroissante.

La suite (u_n) étant (strictement) décroissante et minorée, elle converge.

Plus précisément, la suite étant minorée par *e*, on peut affirmer que sa limite *l* est supérieure ou égale à *e*.

La fonction φ étant dérivable sur l'intervalle $[e\,;+\infty[$, elle y est continue. On en déduit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l = \lim_{n\to+\infty} \varphi(u_n) = \varphi(l)$$

La limite cherchée, *l*, est donc solution, sur l'intervalle $[e\,;+\infty[$, de l'équation : $\varphi(x) = x$.

Or, pour tout réel *x* de l'intervalle $[e\,;+\infty[$, on a :

$$\varphi(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

En définitive, on a : $l = e$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } e.}$$

c) A l'aide de la calculatrice, on obtient (valeurs approchées à 10^{-6}. A partir de u_3, nous ne fournissons que les valeurs approchées) :

$$u_1 = \frac{u_0}{\ln u_0} = \frac{3}{\ln 3} \simeq 2{,}730\,718$$

$$u_2 = \frac{u_1}{\ln u_1} = \frac{\frac{3}{\ln 3}}{\ln\left(\frac{3}{\ln 3}\right)} = \frac{3}{\ln 3 \times (\ln 3 - \ln(\ln 3))} \simeq 2{,}718\,310$$

$$u_3 \simeq 2{,}718\,282$$

$$u_4 \simeq 2{,}718\,282$$