
Lois de probabilité.

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 392 : N°**21, 23, 28, 37**

Page 393 : N°**42, 46**

Page 394 : N°**57, 61**

Page 397 : N°**69**

Page 398 : N°**74, 76**

Page 399 : N°**80**

N°21 page 392

a) On a : $10! = 10 \times \underbrace{9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1}_{9!} = 10 \times 9! = 10 \times 362\,880 = 3\,628\,800.$

$$\boxed{10! = 3\,628\,800}$$

b) Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, on peut écrire :

$$(n+1)! = (n+1) \times \underbrace{n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1}_{n!} = (n+1) \times n!$$

On a par ailleurs : $(0+1)! = 1! = 1 = 1 \times 1 = (0+1) \times 0!.$

La relation précédente est donc également valable pour n nul.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!}$$

N°23 page 392

$$\frac{\binom{25}{7}}{\binom{25}{4}} = \frac{\frac{25!}{7!18!}}{\frac{25!}{4!21!}} = \frac{25!}{7!18!} \times \frac{4!21!}{25!} = \frac{4!21!}{7!18!} = \frac{4! \times 21 \times 20 \times 19 \times 18!}{7 \times 6 \times 5 \times 4! \times 18!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 2 \times 19}{7 \times 6 \times 5} = 38$$

$$\frac{\binom{12}{3}}{\binom{9}{5}} = \frac{\frac{12!}{3!9!}}{\frac{9!}{5!4!}} = \frac{12!}{3!9!} \times \frac{5!4!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} \times \frac{5! \times 4 \times 3!}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 4}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{6 \times 2 \times 11 \times 10 \times 4}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \boxed{\frac{110}{63}}$$

$$\frac{\binom{20}{3}}{\binom{15}{6}} = \frac{\frac{20!}{3!17!}}{\frac{15!}{6!9!}} = \frac{20!}{3!17!} \times \frac{6!9!}{15!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{3! \times 17!} \times \frac{6! \times 9!}{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}$$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 6!}{3 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10} = \frac{6 \times 4 \times 19 \times 6 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 6 \times 6 \times 7 \times 2 \times 13 \times 6 \times 2 \times 11 \times 5 \times 2}$$

$$= \frac{19 \times 6 \times 2}{7 \times 13 \times 11} = \boxed{\frac{228}{1001}}$$

N°28 page 392

Puisque l'on souhaite qu'il y ait au moins deux femmes et deux hommes dans le bureau, le bureau peut être composé :

- Soit de deux hommes et de trois femmes. On parlera d'un bureau du 1^{er} type ;
- Soit de trois hommes et de deux femmes. On parlera d'un bureau du 2^{ème} type.

Nous notons N_1 le nombre de bureaux du 1^{er} type et N_2 le nombre de bureaux du 2^{ème} type.

En notant N le nombre de bureaux cherché, il vient : $N = N_1 + N_2$.

Intéressons-nous aux bureaux du 1^{er} type.

Le nombre de possibilités de choisir 3 hommes parmi les 15 vaut : $\binom{15}{3}$. Pour chacune de ces

possibilités, il y a $\binom{20}{2}$ possibilités de choisir 2 femmes parmi les 20.

On en déduit :

$$N_1 = \binom{15}{3} \times \binom{20}{2} = \frac{15!}{3! \times 12!} \times \frac{20!}{2! \times 18!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} \times \frac{20 \times 19}{2} = 5 \times 7 \times 13 \times 10 \times 19 = 86\,450$$

En raisonnant de façon analogue avec les bureaux du 2^{ème} type, on obtient :

$$N_2 = \binom{15}{2} \times \binom{20}{3} = \frac{15!}{2! \times 13!} \times \frac{20!}{3! \times 17!} = \frac{15 \times 14}{2} \times \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} = 15 \times 7 \times 10 \times 19 \times 6 = 119\,700$$

Il vient alors : $N = N_1 + N_2 = 86\,450 + 119\,700 = 206\,150$.

Dans une association de 15 hommes et 20 femmes,
on peut composer 206 150 bureaux comportant au moins 2 hommes et 2 femmes.

N°37 page 392

a) On a :

$$\begin{aligned} (2x+1)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (2x)^{5-k} 1^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (2x)^{5-k} \\ &= \binom{5}{0} (2x)^{5-0} + \binom{5}{1} (2x)^{5-1} + \binom{5}{2} (2x)^{5-2} + \binom{5}{3} (2x)^{5-3} + \binom{5}{4} (2x)^{5-4} + \binom{5}{5} (2x)^{5-5} \\ &= (2x)^5 + 5(2x)^4 + 10(2x)^3 + 10(2x)^2 + 5(2x)^1 + (2x)^0 \\ &= 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1 \end{aligned}$$

$$(2x+1)^5 = 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$$

b) Ici :

$$\begin{aligned}(3x-2)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (3x)^{4-k} (-2)^k \\ &= \binom{4}{0} (3x)^{4-0} (-2)^0 + \binom{4}{1} (3x)^{4-1} (-2)^1 + \binom{4}{2} (3x)^{4-2} (-2)^2 \\ &\quad + \binom{4}{3} (3x)^{4-3} (-2)^3 + \binom{4}{4} (3x)^{4-4} (-2)^4 \\ &= (3x)^4 + 4(3x)^3(-2)^1 + 6(3x)^2(-2)^2 + 4(3x)^1(-2)^3 + (3x)^0(-2)^4 \\ &= 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16\end{aligned}$$

$$\boxed{(3x-2)^4 = 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16}$$

c) Enfin :

$$\begin{aligned}(2x-1)^7 &= \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (2x)^{7-k} (-1)^k \\ &= \binom{7}{0} (2x)^{7-0} (-1)^0 + \binom{7}{1} (2x)^{7-1} (-1)^1 + \binom{7}{2} (2x)^{7-2} (-1)^2 + \binom{7}{3} (2x)^{7-3} (-1)^3 \\ &\quad + \binom{7}{4} (2x)^{7-4} (-1)^4 + \binom{7}{5} (2x)^{7-5} (-1)^5 + \binom{7}{6} (2x)^{7-6} (-1)^6 + \binom{7}{7} (2x)^{7-7} (-1)^7 \\ &= (2x)^7 - 7(2x)^6 + 21(2x)^5 - 35(2x)^4 + 35(2x)^3 - 21(2x)^2 + 7(2x)^1 - (2x)^0 \\ &= 128x^7 - 448x^6 + 672x^5 - 560x^4 + 280x^3 - 84x^2 + 14x - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{(2x-1)^7 = 128x^7 - 448x^6 + 672x^5 - 560x^4 + 280x^3 - 84x^2 + 14x - 1}$$

N°42 page 393

a) Il y a autant de numéros se terminant pas un 0, un 1, un 2, ..., un 8 ou un 9. On peut donc immédiatement écrire, en notant p la probabilité cherchée :

$$\boxed{p = \frac{1}{10}}$$

Dans la perspective de ce qui va suivre, on peut préciser un peu les choses. Dans un numéro, il y a 10 possibilités pour le premier chiffre, 10 pour le second, ... et 10 pour le dernier. Le nombre total de numéros que l'enfant peut composer s'élève donc à 10^{10} .

b) Déterminons le nombre de numéros comportant exactement k fois le chiffre 0.

Donnons-nous k positions parmi les 10 du numéro et supposons que ces k positions soient exactement celles des 0 figurant dans le numéro. Les $10 - k$ autres positions comportent alors le chiffre 1, 2, 3, ... ou 9. Soit un total de 9^{10-k} possibilités.

Comme il y a $\binom{10}{k}$ façons de choisir k positions parmi 10, on en déduit que le nombre

total de numéros comportant exactement k chiffres 0 vaut : $\binom{10}{k} 9^{10-k}$.

Finalement, la probabilité p_k que le numéro composé comporte exactement k fois le chiffre 0 est égale à :

$$p_k = \frac{\binom{10}{k} 9^{10-k}}{10^{10}}$$

c) La somme des probabilités p_k , pour k variant entre 0 et 10, est égale à 1 :

$$\sum_{k=0}^{10} p_k = \sum_{k=0}^{10} \frac{\binom{10}{k} 9^{10-k}}{10^{10}} = 1$$

Or, on a :
$$\sum_{k=0}^{10} \frac{\binom{10}{k} 9^{10-k}}{10^{10}} = \frac{1}{10^{10}} \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 9^{10-k}.$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{10} p_k = \sum_{k=0}^{10} \frac{\binom{10}{k} 9^{10-k}}{10^{10}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{10^{10}} \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 9^{10-k} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 9^{10-k} = 10^{10}$$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 9^{10-k} = 10^{10}$$

d) On a :

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 9^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 9^{10-k} 1^k = (9+1)^{10} = 10^{10}$$

On a retrouvé ainsi le résultat obtenu à la question précédente.

N°46 page 393

a) On fait l'hypothèse, raisonnable, que la présence d'un nœud dans une planche donnée ne dépend pas de la présence d'un nœud dans une autre planche. Par ailleurs, on travaille sur des ensembles de douze planches et on s'intéresse au nombre total X de planches possédant un nœud. X est une variable aléatoire qui, dans ces conditions, suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,04$.

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,04$.

b) Une table est mise en vente au tarif normal si elle possède au plus une planche fragile, c'est-à-dire si $X \leq 1$. On cherche donc ici : $p(X \leq 1)$.

On a :

$$\begin{aligned} p(X \leq 1) &= p(X = 0) + p(X = 1) \\ &= \binom{12}{0} \times 0,04^0 \times 0,96^{12} + \binom{12}{1} \times 0,04^1 \times 0,96^{11} \\ &= 0,96^{12} + 12 \times 0,04 \times 0,96^{11} \\ &= 0,96^{11} \times (0,96 + 12 \times 0,04) \\ &= 1,44 \times 0,96^{11} \\ &\approx 0,92 \end{aligned}$$

La probabilité qu'une table soit vendue au prix normal est égale à 0,92 (valeur approchée à 10^{-2}).

c) Si la table possède strictement plus de trois planches fragiles elle n'est pas mise en vente. Elle sera donc vendue en promotion si elle possède deux ou trois planches fragiles. On cherche donc ici : $p(X = 2 \text{ ou } X = 3) = p(X = 2) + p(X = 3)$.

On a :

$$p(X = 2) = \binom{12}{2} \times 0,04^2 \times 0,96^{10} = \frac{12 \times 11}{2} \times 0,04^2 \times 0,96^{10} = 66 \times 0,04^2 \times 0,96^{10}$$

Et :

$$p(X = 3) = \binom{12}{3} \times 0,04^3 \times 0,96^9 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} \times 0,04^3 \times 0,96^9 = 220 \times 0,04^3 \times 0,96^9$$

Alors :

$$\begin{aligned} p(X = 2 \text{ ou } X = 3) &= p(X = 2) + p(X = 3) \\ &= 66 \times 0,04^2 \times 0,96^{10} + 220 \times 0,04^3 \times 0,96^9 \\ &= 0,04^2 \times 0,96^9 \times (66 \times 0,96 + 220 \times 0,04) \\ &= 72,16 \times 0,04^2 \times 0,96^9 \\ &\approx 0,08 \end{aligned}$$

La probabilité qu'une table soit vendue en promotion est égale à 0,08 (valeur approchée à 10^{-2}).

Remarque : en donnant des valeurs plus précises pour ces deux probabilités, on obtient :

$$p(X \leq 1) + p(X = 2 \text{ ou } X = 3) = p(X \leq 3) \approx 0,999$$

Dans les conditions de l'exercice, la probabilité qu'une table comporte strictement plus de trois planches fragile est inférieure à un dix-millième ...

N°57 page 394

a) Pour tout x réel positif, on a :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

b) On cherche ici $p(X \leq t)$.

$$\text{On a : } p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^{-\lambda \times 0}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$p(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

c) On cherche ici : $p(X \geq t)$.

On a : $p(X \geq t) = 1 - p(X < t)$. Or $p(X < t) = p(X \leq t)$ et, d'après la question précédente : $p(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Il vient donc : $p(X \geq t) = 1 - p(X < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

$$p(X \geq t) = e^{-\lambda t}$$

N°61 page 394

a) On procède comme dans l'exercice 57 ci-dessus, et on obtient classiquement :

$$\begin{aligned} p(T < t) &= 1 - e^{-\lambda t} \\ p(T > t) &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

b) On suppose ici que l'on a $p(T > 600) = 0,93$. On a alors :

$$p(T > 600) = 0,93 \Leftrightarrow e^{-\lambda \times 600} = 0,93 \Leftrightarrow -600\lambda = \ln 0,93 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,93}{600} \approx 0,000\ 12$$

(à 10^{-5} près)

$$\lambda \approx 0,000\ 12 \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}$$

c) On prend ici : $\lambda = 0,000\ 1 = 10^{-4}$.

On a alors : $p(T > 1500) = e^{-10^{-4} \times 1500} = e^{-0,15} \approx 0,86$ à 10^{-2} près.

$$p(T > 1500) \approx 0,86 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

N°69 page 397

L'urne contient au total $n + 2$ boules.

Le nombre total de tirages de deux boules dans cette urne vaut donc :

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{2!n!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Puisqu'il y a deux boules blanches dans l'urne, il n'y a qu'une issue réalisant l'événement A_2 et il vient :

$$p(A_2) = \frac{1}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

On en tire alors :

$$\begin{aligned} p(A_2) = \frac{1}{15} &\Leftrightarrow \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow (n+2)(n+1) = 30 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 - 30 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 28 = 0 \end{aligned}$$

On résout alors l'équation : $x^2 + 3x - 28 = 0$ sachant que nous nous intéressons aux solutions entières positives.

Le discriminant vaut : $3^2 - 4 \times 1 \times (-28) = 9 + 112 = 121$.

Les racines s'écrivent alors : $\frac{-3 - \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 - 11}{2} = -7$ et $\frac{-3 + \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 + 11}{2} = 4$.

L'urne contient 4 boules noires.

N°74 page 397

Le nombre $100!$ est un entier et admet donc une décomposition unique (à l'ordre des facteurs près) en facteurs premiers.

Les « 0 » de son écriture décimale proviennent du fait que l'on va pouvoir regrouper des « 2 » et des « 5 » dans cette décomposition pour obtenir des facteurs « 10 ». La question est : combien de facteurs « 10 » peut-on ainsi constituer ?

Pour répondre à cette question, il suffit de considérer les exposants de « 2 » et « 5 » dans la décomposition en facteurs premiers de 100!

Nous commençons par compter les facteurs « 5 » en nous intéressant aux puissances de 5 et à leurs multiples, qui apparaissent dans la définition de 100! sous forme d'un produit d'entiers naturels consécutifs.

Comme $5^3 = 125$, la plus grande puissance de 5 apparaissant dans 100! est $5^2 = 25$. Ses multiples inférieurs ou égaux à 100 sont : $100 = 4 \times 25$, $75 = 3 \times 25$, $50 = 2 \times 25$ et $25 = 1 \times 25$. Chacun contribue pour 2 facteurs « 5 ». Ils contribuent donc pour 8 facteurs « 5 » au total.

On doit ensuite comptabiliser les multiples de « 5 » qui ne sont pas multiples de « 25 » :

Il y a : $\frac{100}{5} = 20$ multiples de « 5 » non nuls inférieurs ou égaux à 100. Parmi eux, on vient de

voir qu'il y a avait 4 multiples de 25. Il y a donc au total $20 - 4 = 16$ multiples de 5 inférieurs ou égaux à 100 et non multiples de 25.

Chacun de ces 16 multiples contribue pour un facteur « 5 ».

Ils contribuent donc pour 16 facteurs « 5 » au total.

En définitive, la puissance de 5 apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de 100! est : $5^{8+16} = 5^{24}$.

On procède de façon similaire avec les puissances de 2.

La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 100 est $2^6 = 64$ qui contribue pour $\boxed{6}$ facteurs « 2 ». Aucun de ses multiples non nuls, hormis lui-même, est inférieur ou égal à 100. On considère ensuite $2^5 = 32$. Ses multiples, non nuls et non multiples de 2^6 , inférieurs ou égaux à 100 sont (il suffit de multiplier 32 par un facteur impair ...) : 32 et 96. Chacun contribue pour 5 facteurs « 2 », soit $\boxed{10}$ au total.

On considère ensuite $2^4 = 16$. Ses multiples, non nuls et non multiples de 2^6 et de 2^5 , inférieurs ou égaux à 100 sont (il suffit de multiplier 16 par un facteur impair ...) : 16, 48 et 80. Chacun contribue pour 4 facteurs « 2 », soit $\boxed{12}$ au total.

On considère ensuite $2^3 = 8$. Ses multiples, non nuls et non multiples de 2^6 , de 2^5 et de 2^4 , inférieurs ou égaux à 100 sont (...) : 8, 24, 40, 56, 72 et 88. Chacun contribue pour 3 facteurs « 2 », soit $\boxed{18}$ au total.

On considère ensuite $2^2 = 4$. Ses multiples, non nuls et non multiples de 2^6 , de 2^5 , de 2^4 et de 2^3 , inférieurs ou égaux à 100 sont (...) : 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, et 92.

Chacun contribue pour 2 facteurs « 2 », soit $\boxed{24}$ au total.

On considère enfin $2^1 = 2$. Ses multiples, non nuls et non multiples de 2^6 , de 2^5 , de 2^4 , de 2^3 et de 2^2 , inférieurs ou égaux à 100 sont (...) : 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 90, 94 et 98. Chacun contribue pour 1 facteur « 2 », soit $\boxed{25}$ au total.

En définitive, la puissance de 2 apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de $100!$ est : $2^{6+10+12+18+24+25} = 2^{95}$.

On a donc : $100! = 2^{95} \times 5^{24} \times n$ où n est un entier qui n'est divisible ni par 2, ni par 5.
Or, $100! = 2^{71} \times 2^{24} \times 5^{24} \times n = 2^{71} \times 10^{24} \times n$.

On en conclut finalement :

Le nombre $100!$ se termine par 24 zéros.

Remarque : le travail effectué sur le facteur « 2 » n'était pas indispensable (!) car on pouvait rapidement établir que l'exposant de « 5 » dans la décomposition en facteurs premiers de $100!$ est inférieur à celui de « 2 ».

N°76 page 397

a) Nous pouvons établir ce premier résultat en utilisant l'équivalence :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln 2$$

Pour cela, nous introduisons la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Nous étudions rapidement f .

$$\text{On a : } f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Puis : } f''(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

On a donc : $\forall x \in [1; +\infty[$, $f''(x) < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

$$\text{On a : } f'(1) = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) - \frac{1}{1+1} = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0.$$

Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right] = \ln 1 - 0 = 0$.

On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur l'intervalle $[1; +\infty[$ (en effet, si elle s'annulait, étant strictement décroissante et continue, elle prendrait alors des valeurs strictement négatives et ne pourrait donc tendre vers 0 en $+\infty$).

On en déduit finalement que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Or, on a : $f(1) = 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \ln 2$. On a donc : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \geq \ln 2$.

En particulier, pour tout entier naturel non nul :

$$f(n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln 2$$

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2}$$

On a, pour tout entier naturel n non nul : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

Soit alors \mathcal{P}_n la propriété : « $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ».

Pour $n = 1$, on a : $\frac{1!}{1^1} = \frac{1}{1} = 1$ et $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$.

La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

Supposons maintenant que \mathcal{P}_n soit vraie et étudions \mathcal{P}_{n+1} .

$$\text{On a : } \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{\left[n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n} = \frac{n!}{n^n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

D'après la question précédente, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, soit : $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence : $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Les membres de ces deux inégalités étant strictement positifs, on peut effectuer une multiplication membre à membre et il vient :

$$\frac{n!}{n^n} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2}$$

Soit : $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}$.

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

On déduit de ce qui précède que la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}}$$

N°80 page 399

a) On a : $E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a tf(t) dt$.

Or : $\int_0^a tf(t) dt = \int_0^a t\lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^a te^{-\lambda t} dt$.

On effectue une intégration par parties.

Avec $u(t) = t$ on a immédiatement $u'(t) = 1$ qui est continue sur tout intervalle de \mathbb{R} en tant que fonction constante.

Avec $v'(t) = e^{-\lambda t}$, qui est continue sur tout intervalle de \mathbb{R} comme composée de deux

fonctions continues sur \mathbb{R} , on peut considérer comme primitive : $v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$.

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} \int_0^a te^{-\lambda t} dt &= \left[-\frac{1}{\lambda} te^{-\lambda t} \right]_0^a + \frac{1}{\lambda} \int_0^a e^{-\lambda t} dt \\ &= -\frac{1}{\lambda} ae^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{\lambda} ae^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} (\lambda a + 1) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } \int_0^a tf(t) dt = \lambda \int_0^a te^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}(\lambda a + 1)e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}.$$

Comme le paramètre λ est strictement positif, on a : $\lim_{a \rightarrow +\infty} (-\lambda a) = -\infty$, puis, par composition : $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-\lambda a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Par ailleurs, par croissance comparée, on a : $\lim_{a \rightarrow +\infty} (\lambda a e^{-\lambda a}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

On a donc : $\lim_{a \rightarrow +\infty} [(\lambda a + 1)e^{-\lambda a}] = 0$ et, finalement :

$$E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a tf(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\lambda}(\lambda a + 1)e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \right] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

On procède de façon similaire pour le calcul de la variance :

$$\begin{aligned} \int_0^a [t - E(X)]^2 f(t) dt &= \int_0^a \left[t - \frac{1}{\lambda} \right]^2 \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_0^a \left(t^2 - \frac{2}{\lambda} t + \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \left[\int_0^a t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{2}{\lambda} \int_0^a t e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a e^{-\lambda t} dt \right] \end{aligned}$$

Seule l'intégrale $\int_0^a t^2 e^{-\lambda t} dt$ n'a pas encore été calculée.

On effectue, ici encore, une intégration par parties.

Avec $u(t) = t^2$ on a immédiatement $u'(t) = 2t$ qui est continue sur tout intervalle de \mathbb{R} en tant que fonction constante.

Avec $v'(t) = e^{-\lambda t}$, qui est continue sur tout intervalle de \mathbb{R} comme composée de deux fonctions continues sur \mathbb{R} , on peut considérer comme primitive : $v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$.

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} \int_0^a t^2 e^{-\lambda t} dt &= \left[-\frac{1}{\lambda} t^2 e^{-\lambda t} \right]_0^a + \frac{2}{\lambda} \int_0^a t e^{-\lambda t} dt \\ &= -\frac{1}{\lambda} a^2 e^{-\lambda a} + \frac{2}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda^2} (\lambda a + 1) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^3} \left(\frac{1}{2} \lambda^2 a^2 + \lambda a + 1 \right) e^{-\lambda a} + \frac{2}{\lambda^3} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^a [t - E(X)]^2 f(t) dt &= \lambda \left[\int_0^a t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{2}{\lambda} \int_0^a t e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a e^{-\lambda t} dt \right] \\ &= \lambda \left[-\frac{2}{\lambda^3} \left(\frac{1}{2} \lambda^2 a^2 + \lambda a + 1 \right) e^{-\lambda a} + \frac{2}{\lambda^3} - \frac{2}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda^2} (\lambda a + 1) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda^2} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \right) \right] \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2} \lambda^2 a^2 + \cancel{\lambda a} + \cancel{1} \right) e^{-\lambda a} + \frac{\cancel{2}}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} (\cancel{\lambda a} + \cancel{1}) e^{-\lambda a} - \frac{\cancel{2}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \\ &= -a^2 e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 a^2 + 1) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a cette fois :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (\lambda^2 a^2 e^{-\lambda a}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

On en déduit :

$$V(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a [t - E(X)]^2 f(t) dt \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 a^2 + 1) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \right] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

b) Dans le cas de la loi uniforme définie sur l'intervalle $[0;1]$, on a : $f(x) = 1$.

Il vient alors : $E(U) = \int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 0^2 = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{E(U) = \frac{1}{2}}$$

Quant à la variance :

$$\begin{aligned} V(U) &= \int_0^1 [t - E(U)]^2 f(t) dt = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4} \right) dt = \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 1 - \left(\frac{1}{3} \times 0^3 - \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{4} \times 0 \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4 - 6 + 3}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(U) = \frac{1}{12}}$$

Remarque : vous pourrez généraliser ces résultats à la loi uniforme définie sur l'intervalle

$[a; b]$ ($a < b$). On obtient : $E(U) = \frac{a+b}{2}$ et $V(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$.