
Primitives (1^{ère} partie)

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 234 : N°27

Page 236 : N°49, 51

Page 235 : N°35, 36, 40

N°27 page 234

a) La fonction F est le produit de deux fonctions :

- La fonction $x \mapsto x-1$ qui est continue sur \mathbb{R} , et donc, à fortiori, sur $]-\infty; 1[$, en tant que fonction polynôme.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$. Cette fonction est elle-même la composée de la fonction polynôme $x \mapsto 1-x$, qui est l'opposée de la fonction précédente et donc également dérivable sur $]-\infty; 1[$ et de la fonction racine carrée, dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Mais on a : $x < 1 \Leftrightarrow 1-x > 0$. Ainsi, lorsque x varie dans $]-\infty; 1[$, la fonction $x \mapsto 1-x$ prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* et, en définitive, on peut conclure que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Conclusion : la fonction F est dérivable sur $]-\infty; 1[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction F est dérivable sur $]-\infty; 1[$.

Pour tout x réel dans $]-\infty; 1[$, il vient alors :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 \times \sqrt{1-x} + (x-1) \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} \times 2\sqrt{1-x} - (x-1)}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2(1-x) + (1-x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{1-x} \end{aligned}$$

Finalement :

$\forall x \in]-\infty; 1[, F'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{1-x}$

b) D'après le résultat précédent, si on pose, pour tout x réel dans $]-\infty; 1[$: $G(x) = \frac{2}{3}F(x)$,

on obtient : $\forall x \in]-\infty; 1[$, $G'(x) = \frac{2}{3}F'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x}$.

D'où :

Une primitive sur $]-\infty; 1[$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x}$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{1-x}$$

N°35 page 235

a) Posons $u(x) = x^4 + 1$. On en tire immédiatement : $u'(x) = 4x^3$.

Pour tout x réel on a alors : $f(x) = x^3(x^4 + 1)^2 = \frac{1}{4}(4x^3)(x^4 + 1)^2 = \frac{1}{4}u'(x)u^2(x)$.

On peut alors donner les primitives de la fonction f :

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} u^3(x) + C = \frac{1}{12} (x^4 + 1)^3 + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{12} (x^4 + 1)^3 + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

b) Posons $u(x) = x^2 - x + 2$. On en tire immédiatement : $u'(x) = 2x - 1$.

Pour tout x réel on a alors :

$$f(x) = (-6x + 3)(x^2 - x + 2) = -3(3x - 1)(x^2 - x + 2) = -3u'(x)u(x).$$

On peut alors donner les primitives de la fonction f :

$$F(x) = -3 \times \frac{1}{2} u^2(x) + C = -\frac{3}{2} (x^2 - x + 2)^2 + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = -\frac{3}{2} (x^2 - x + 2)^2 + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

N°36 page 235

- a) Posons $u(x) = \sin x$. On a alors, pour tout x réel : $u'(x) = \cos x$ et $f(x) = 5u'(x)u^2(x)$.
On peut alors donner les primitives de la fonction f :

$$F(x) = 5 \times \frac{1}{3} u^3(x) + C = \frac{5}{3} \sin^3(x) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{5}{3} \sin^3(x) + C}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

- b) Posons $u(x) = \tan x$. On a alors, pour tout réel de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $u'(x) = 1 + \tan^2 x$ et
 $f(x) = u'(x)u^3(x)$. On peut alors donner les primitives de la fonction f :

$$F(x) = \frac{1}{4} u^4(x) + C = \frac{1}{4} \tan^4 x + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4} \tan^4 x + C}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

N°40 page 235

- a) Posons $u(x) = x^3 + x + 5$. On a alors : $u'(x) = 3x^2 + 1$ et, pour tout x réel strictement

positif : $f(x) = \frac{\frac{1}{3}(3x^2 + 1)}{(x^3 + x + 5)^4} = \frac{\frac{1}{3}u'(x)}{u^4(x)} = \frac{1}{3}u'(x)u^{-4}(x)$. On peut alors donner les

primitives de la fonction f :

$$F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{-4+1} u^{-4+1}(x) + C = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) u^{-3}(x) + C = -\frac{1}{9} u^{-3}(x) + C = -\frac{1}{9(x^3 + x + 5)^3} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{9(x^3 + x + 5)^3} + C}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

b) Posons $u(x) = x^2 - 1$. On a alors, pour tout x réel de l'intervalle $]-\infty; -1[$: $u'(x) = 2x$ et

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2} \times 2x}{(x^2 - 1)^7} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u^7(x)} = \frac{1}{2} u'(x) u^{-7}(x). \text{ On peut alors donner les primitives de la}$$

fonction f :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-7+1} u^{-7+1}(x) + C = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{6}\right) u^{-6}(x) + C = -\frac{1}{12} (x^2 - 1)^{-6} + C = -\frac{1}{12(x^2 - 1)^6} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$

$$F(x) = -\frac{1}{12(x^2 - 1)^6} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

N°49 page 236

a) On a pour tout x réel : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, soit :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x). \text{ On peut alors donner une primitive } F \text{ de la}$$

fonction f :

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

b) On procède de façon analogue à ce qui a été fait précédemment en utilisant cette fois :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1, \text{ soit : } \cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x). \text{ On peut alors}$$

donner une primitive F de la fonction f :

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

c) Pour tout x réel, on a : $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, soit : $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$. On peut alors donner une primitive F de la fonction f :

$$F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)$$

N°51 page 236

Soit P une fonction polynôme de degré 3.

La fonction P est donc de la forme :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Pour tout x réel de l'intervalle $]1; +\infty[$, on a alors :

$$F(x) = P(x)\sqrt{x-1} = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x-1}$$

La fonction F est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet ensemble et on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= (3ax^2 + 2bx + c)\sqrt{x-1} + (ax^3 + bx^2 + cx + d)\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2(x-1)(3ax^2 + 2bx + c) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{6ax^3 + 4bx^2 + 2cx - 6ax^2 - 4bx - 2c + ax^3 + bx^2 + cx + d}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{7ax^3 + (-6a + 5b)x^2 + (-4b + 3c)x + (-2c + d)}{2\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

Dire que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1; +\infty[$ équivaut à :

$$\forall x \in]1; +\infty[, F'(x) = f(x)$$

Soit, pour tout x réel de $]1; +\infty[$:

$$\frac{7ax^3 + (-6a + 5b)x^2 + (-4b + 3c)x + (-2c + d)}{2\sqrt{x-1}} = x^2\sqrt{x-1}$$

Soit :

$$7ax^3 + (-6a + 5b)x^2 + (-4b + 3c)x + (-2c + d) = 2\sqrt{x-1} \times x^2\sqrt{x-1} = 2x^2(x-1) = 2x^3 - 2x^2$$

Par identification, on en tire le système :

$$\begin{cases} 7a = 2 \\ 5b - 6a = -2 \\ 3c - 4b = 0 \\ -2c + d = 0 \end{cases}$$

Primitives (1^{ère} partie)
Corrigés d'exercices

On a alors :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 7a = 2 \\ 5b - 6a = -2 \\ 3c - 4b = 0 \\ -2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{6a - 2}{5} \\ 3c - 4b = 0 \\ -2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{6 \times \frac{2}{7} - 2}{5} \\ 3c - 4b = 0 \\ -2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{-2}{5} \\ 3c - 4b = 0 \\ -2c + d = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{-2}{35} \\ c = \frac{4}{3}b \\ -2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{-2}{35} \\ c = \frac{4}{3} \times \frac{-2}{35} \\ d = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{-2}{35} \\ c = \frac{-8}{105} \\ d = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{-2}{35} \\ c = \frac{-8}{105} \\ d = \frac{-16}{105} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalemment :

$$F(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 - \frac{2}{35}x^2 - \frac{8}{105}x - \frac{16}{105} \right) \sqrt{x-1}$$