Lois de probabilité continues.

Corrigés d'exercices

Version du 22/05/2015

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°4 page 367

Les événements $\left(X \in [0,4\,;0,9]\right)$ et $\left(X \in [0,3\,;t]\right)$ sont indépendants si, et seulement si, on a l'égalité :

$$P\left(X \in [0,4\,;0,9] \cap [0,3\,;t]\right) = P\left(X \in [0,4\,;0,9]\right) \times P\left(X \in [0,3\,;t]\right).$$

On a facilement : $P\left(X \in [0,4\,;0,9]\right) \times P\left(X \in [0,3\,;t]\right) = (0,9-0,4)\times(t-0,3) = 0,5\times(t-0,3)$.

L'intersection $[0,4\,;0,9]\cap[0,3\,;t]$ dépend de la valeur de *t* … alors que nous ne la connaissons pas !

- Si on suppose $0,3 \leq t \leq 0,9$, il vient : $[0,4\,;0,9]\cap[0,3\,;t] = [0,4\,;t]$.
- Si on suppose $0,9 \leq t \leq 1$, il vient : $[0,4\,;0,9]\cap[0,3\,;t] = [0,4\,;0,9]$.

Le deuxième cas est à exclure puisqu'on aurait alors :

$$P\left(X \in [0,4\,;0,9]\cap[0,3\,;t]\right) = P\left(X \in [0,4\,;0,9]\right) = 0,9-0,4 = 0,5$$

On aurait alors :

$$P\left(X \in [0,4\,;0,9]\cap[0,3\,;t]\right) = P\left(X \in [0,4\,;0,9]\right)\times P\left(X \in [0,3\,;t]\right)$$
$$\Leftrightarrow 0,5 = 0,5\times(t-0,3)$$
$$\Leftrightarrow t = 1,3$$

Résultat absurde puisque *t* est inférieur à 1.

On cherche donc *t* dans l'intervalle $[0,3\,;0,9]$.

On a alors :

$$
\begin{aligned}
&P\left(X\in[0,4\,;0,9]\cap[0,3\,;t]\right)=P\left(X\in[0,4\,;0,9]\right)\times P\left(X\in[0,3\,;t]\right)\\
\Leftrightarrow\ &P\left(X\in[0,4\,;t]\right)=P\left(X\in[0,4\,;0,9]\right)\times P\left(X\in[0,3\,;t]\right)\\
\Leftrightarrow\ &t-0,4=0,5\times(t-0,3)\\
\Leftrightarrow\ &t-0,4=0,5t-0,15\\
\Leftrightarrow\ &0,5t=0,25\\
\Leftrightarrow\ &t=0,5
\end{aligned}
$$

Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$,
alors les événements $\left(X\in[0,4\,;0,9]\right)$ et $\left(X\in[0,3\,;t]\right)$ sont indépendants pour $t=0,5$.

N°9 page 369

Notons T la variable aléatoire modélisant la durée de vie de l'appareil considéré.
T suis une loi exponentielle de paramètre λ. On a donc (cours) : $\mathrm{E}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ et on cherche ici : $\mathrm{P}\left(\mathrm{T}>\frac{1}{\lambda}\right)$.

Comme on a, pour tout réel a positif : $\mathrm{P}(\mathrm{T}>a)=\mathrm{P}(\mathrm{T}\geq a)=e^{-\lambda a}$, il vient :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{T}>\frac{1}{\lambda}\right)=e^{-\lambda\times\frac{1}{\lambda}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

La probabilité pour qu'un appareil dont la durée de vie suit une loi exponentielle
dure plus longtemps que son espérance de vie est égale à $\frac{1}{e}$.

N°33 page 382

1. Soit a un réel supérieur à 1.

   On a : $\int_1^a k\,t^{-2}dt=k\int_1^a\frac{1}{t^2}dt=k\times\left[-\frac{1}{t}\right]_1^a=k\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

   D'où : $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a k\,t^{-2}dt=\int_1^{+\infty}k\,t^{-2}dt=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[k\left(1-\frac{1}{a}\right)\right]=k$.

   Or, on veut $\int_1^{+\infty}k\,t^{-2}dt=1$. On en déduit : $k=1$.

La fonction *f* est une densité de probabilité pour $k = 1$.

2. D'après la question précédente, on a : $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

   Il vient alors : $P([1;2]) = \int_1^2 \dfrac{dt}{t^2} = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^2 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

   Par ailleurs :

$$P_{[2;5]}([3;5]) = \frac{P([3;5]\cap[2;5])}{P([2;5])} = \frac{P([3;5])}{P([2;5])} = \frac{\int_3^5 \frac{dt}{t^2}}{\int_2^5 \frac{dt}{t^2}} = \frac{\left[-\frac{1}{t}\right]_3^5}{\left[-\frac{1}{t}\right]_2^5} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{15}\times\frac{10}{3} = \frac{4}{9}$$

$P([1;2]) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{[2;5]}([3;5]) = \dfrac{4}{9}$.

N°34 page 382

La fonction *f* considérée est positive sur l'intervalle $[0;4]$.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(t)\,dt &= \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 f(t)\,dt \\
&= \int_0^2 \frac{1}{4}dt + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{1}{6}dt \\
&= \frac{1}{4}\times(2-0) + \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-2\right) + \frac{1}{6}\times\left(4-\frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\times\frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Des deux points précédents, on déduit :

La fonction *f* est une densité sur l'intervalle $[0;4]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} P([1;3]) &= \int_1^3 f(t)\,dt \\ &= \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 f(t)\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{1}{4}\,dt + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}\,dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{1}{6}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\times(2-1) + \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-2\right) + \frac{1}{6}\times\left(3-\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

On a ensuite :

$$P_{[2;4]}([2;3]) = \frac{P([2;3]\cap[2;4])}{P([2;4])} = \frac{P([2;3])}{P([2;4])}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P([2;3]) &= \int_2^3 f(t)\,dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 f(t)\,dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}\,dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{1}{6}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-2\right) + \frac{1}{6}\times\left(3-\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P([2;4]) &= \int_2^4 f(t)\,dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 f(t)\,dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}\,dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{1}{6}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-2\right) + \frac{1}{6}\times\left(4-\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où : $P_{[2;4]}([2;3]) = \dfrac{P([2;3])}{P([2;4])} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}\times 2 = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{P([1;3]) = \frac{7}{12} \text{ et } P_{[2;4]}([2;3]) = \frac{2}{3}.}$$

N°36 page 382

a. La fonction *f* prend des valeurs positives sur I ($f(t)$ est le produit d'un réel strictement positif par un carré également strictement positif).
Elle est continue sur I en tant que fonction rationnelle.
Enfin, on a : $\int_1^9 f(t)\,dt = \int_1^9 \frac{9}{8}\times\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{9}{8}\times\left[-\frac{1}{t}\right]_1^9 = \frac{9}{8}\times\left(-\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \frac{9}{8}\times\frac{8}{9} = 1$.

La fonction *f* est une densité pour une loi de probabilité sur l'intervalle $\mathrm{I}=[1\,;9]$.

b. $$\mathrm{P}(X<2) = \int_1^2 f(t)\,dt = \int_1^2 \frac{9}{8}\times\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{9}{8}\times\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{9}{8}\times\left(-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \frac{9}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

$$\mathrm{P}(X<2) = \frac{9}{16}$$

c. Comme $\mathrm{P}(X\geq a) = 1-\mathrm{P}(X<a) = 1-\mathrm{P}(X\leq a)$, on a :

$$\mathrm{P}(X\geq a) = \mathrm{P}(X\leq a) \Leftrightarrow 1-\mathrm{P}(X\leq a) = \mathrm{P}(X\leq a) \Leftrightarrow \mathrm{P}(X\leq a) = \frac{1}{2}$$

On a : $\mathrm{P}(X\leq a) = \int_1^a f(t)\,dt = \int_1^a \frac{9}{8}\times\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{9}{8}\times\left[-\frac{1}{t}\right]_1^a = \frac{9}{8}\times\left(-\frac{1}{a}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \frac{9}{8}\times\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

D'où : $\mathrm{P}(X\leq a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{8}\times\left(1-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\times\frac{8}{9} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow a = \frac{9}{5}$.

$\mathrm{P}(X\geq a) = \mathrm{P}(X\leq a)$ pour $a = \frac{9}{5}$.

d. On a :

$$\mathrm{E}(X) = \int_1^9 t\,f(t)\,dt = \int_1^9 t\times\frac{9}{8}\times\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{9}{8}\times\int_1^9 \frac{9}{8}\times\frac{1}{t}\,dt$$
$$= \frac{9}{8}\times[\ln t]_1^9 = \frac{9}{8}\times(\ln 9-\ln 1) = \frac{9}{8}\times\ln 3^2 = \frac{9}{4}\times\ln 3$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{9}{4}\times\ln 3$$

N°41 page 383

1. Soit m dans l'intervalle $\left[a\,;b\right]$ tel que $P\left(X \le m\right) = P\left(X \ge m\right)$.

   Notons dans un premier temps que l'on a : $P\left(X \le m\right) + P\left(X \ge m\right) = P\left(\left[a\,;b\right]\right) = 1$.

   On cherche donc m tel que : $P\left(X \le m\right) = P\left(X \ge m\right) = \dfrac{1}{2}$.
   Cette démarche, très générale, permet d'obtenir la médiane de la loi considérée.

   On a d'abord : $P\left(X \le m\right) = P\left(X \ge m\right) \Leftrightarrow P\left(X \in \left[a\,;m\right]\right) = P\left(X \in \left[m\,;b\right]\right)$.
   X suivant une loi uniforme que l'intervalle $\left[a\,;b\right]$, il vient immédiatement :

$$P\left(X \in \left[a\,;m\right]\right) = \frac{m-a}{b-a} \text{ et } P\left(X \in \left[m\,;b\right]\right) = \frac{b-m}{b-a}$$

   D'où :

$$\begin{aligned} & P\left(X \in \left[a\,;m\right]\right) = P\left(X \in \left[m\,;b\right]\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{m-a}{b-a} = \frac{b-m}{b-a} \Leftrightarrow m-a = b-m \\ \Leftrightarrow\ & 2m = a+b \Leftrightarrow m = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

   Finalement, on a : $P\left(X \le m\right) = P\left(X \ge m\right)$ pour $m = \dfrac{a+b}{2}$.

> Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ ($a < b$)
> alors on a : $P\left(X \le m\right) = P\left(X \ge m\right) \Leftrightarrow m = \dfrac{a+b}{2}$.

   Remarque : pour $m = \dfrac{a+b}{2}$, on a bien $\dfrac{m-a}{b-a} = \dfrac{b-m}{b-a} = \dfrac{1}{2}$.

2. On a immédiatement $m = \dfrac{a+b}{2} = E\left(X\right)$.
   Résultat classique pour toute loi uniforme.

$$\boxed{m = \frac{a+b}{2} = E\left(X\right)}$$

N°46 page 384

1. **FAUX**

   La loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet pour densité la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$. Comme on a ici $\lambda = 0,01$ la densité *f* est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f : t \mapsto 0,01e^{-0,01t}$.

2. **VRAI**

   Rappelons le calcul général (cf. le cours) :
   $$\mathrm{P}(Y \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$
   D'où ici, avec $\lambda = 0,01$: $\mathrm{P}(Y \leq t) = 1 - e^{-0,01t}$.

3. **FAUX**
   Attention de ne pas oublier de convertir les minutes en secondes !!!! ☺ 3 minutes correspondant à 180 secondes, on cherche ici $\mathrm{P}(Y \leq 180)$.
   D'après le calcul précédent : $\mathrm{P}(Y \leq 180) = 1 - e^{-0,01\times 180} = 1 - e^{-1,8} \simeq 0,83$ à 10^{-2} près.

4. **VRAI**

   On s'intéresse ici à $\mathrm{P}(Y > 60)$.
   Rappelons que l'on a : $\mathrm{P}(Y > t) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$.
   D'où : $\mathrm{P}(Y > t) = e^{-0,01\times 60} = e^{-0,6} \simeq 0,549$ à 10^{-3} près.

N°49 page 384

Soit T la variable aléatoire désignant la durée de vie de l'appareil. D'après l'énoncé, T suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Comme l'espérance de T vaut $\dfrac{1}{\lambda}$, on cherche ici : $P\left(\mathrm{T} \geq \dfrac{2}{\lambda}\right)$.
On a, pour tout réel positif *a* : $P(\mathrm{T} \geq a) = e^{-\lambda a}$. Il vient donc :

$$P\left(\mathrm{T} \geq \frac{2}{\lambda}\right) = e^{-\lambda \times \frac{2}{\lambda}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \simeq 0,135$$

La probabilité que la durée de vie de l'appareil soit supérieure ou égale au double de son espérance vaut $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$ soit environ 0,135.

N°52 page 384

1. Pour tous réels positifs a et b tels que $a < b$, on a classiquement :

$$P\left(X \in [a\,;b]\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

D'où :

$$P\left(X \in [1\,;2]\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-\lambda} - \left(e^{-\lambda}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(e^{-\lambda}\right)^2 - e^{-\lambda} + \frac{1}{4} = 0$$

En posant, comme suggéré, $x = e^{-\lambda}$, il vient :

$$P\left(X \in [1\,;2]\right) = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{-\lambda}\right)^2 - e^{-\lambda} + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda = -\ln 2$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \ln 2$$

> Pour une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ, on a :
>
> $$P\left(X \in [1\,;2]\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$$

2. Comme $\lambda = \ln 2$, on a : $\frac{\ln 2}{\lambda} = 1$. Ainsi, la demi vie associée à la variable aléatoire X est égale à 1. On en déduit immédiatement : $P(X > 1)$.

> $$P(X > 1)$$

N°58 page 385

Notons d'abord que l'on a : $R(t) = P(X < t) = P(X \le t)$.

1. On a, pour tout réel t strictement positif : $]-\infty\,;t] =]-\infty\,;-t[\,\cup\,[-t\,;t]$ et $]-\infty\,;-t[\,\cap\,[-t\,;t] = \varnothing$.
   On en déduit : $P\left(X \in]-\infty\,;t]\right) = P\left(X \in]-\infty\,;-t[\right) + P\left(X \in [-t\,;t]\right)$.

D'où :

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{X}\in[-t\,;t]\right) &= P\left(\mathrm{X}\in]-\infty\,;t]\right)-P\left(\mathrm{X}\in]-\infty\,;-t[\right)\\ &= P\left(\mathrm{X}\le t\right)-P\left(\mathrm{X}<-t\right)\\ &= R(t)-P\left(\mathrm{X}<-t\right)\end{aligned}$$

Mais de la parité de la densité de la loi normale centrée réduite on tire :

$$P\left(\mathrm{X}<-t\right)=P\left(\mathrm{X}>t\right)=1-P\left(\mathrm{X}\le t\right)=1-R(t)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{X}\in[-t\,;t]\right) &= R(t)-P\left(\mathrm{X}<-t\right)\\ &= R(t)-\left[1-R(t)\right]\\ &= 2R(t)-1\end{aligned}$$

> Si X suit la loi normale centrée réduite, on a, pour tout t strictement positif :
>
> $$P\left(\mathrm{X}\in[-t\,;t]\right)=2R(t)-1$$

2. Pour tout réel α dans l'intervalle $]0\,;1[$, il vient alors :

$$\begin{aligned} & P\left(-u_\alpha\le \mathrm{X}\le u_\alpha\right)=1-\alpha\\ \Leftrightarrow\ & P\left(\mathrm{X}\in[-u_\alpha\,;u_\alpha]\right)=1-\alpha\\ \Leftrightarrow\ & 2R(u_\alpha)-1=1-\alpha\\ \Leftrightarrow\ & 2R(u_\alpha)=2-\alpha\\ \Leftrightarrow\ & R(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

> $$\forall\alpha\in]0\,;1[,\ P\left(-u_\alpha\le \mathrm{X}\le u_\alpha\right)=1-\alpha \Leftrightarrow R(u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$$

3. a. Pour $\alpha=0,05$ on a : $R\left(u_{0,05}\right)=1-\dfrac{0,05}{2}=1-0,025=0,975$.

   On obtient alors : $u_{0,05}\simeq 1,96$ (valeur très classique à connaître).

   b. Pour $\alpha=0,02$ on a : $R\left(u_{0,02}\right)=1-\dfrac{0,02}{2}=1-0,01=0,99$.

   On obtient alors : $u_{0,02}\simeq 2,326\,348$.

Pour $\alpha = 0,001$ on a : $R\left(u_{0,001}\right) = 1 - \frac{0,001}{2} = 1 - 0,0005 = 0,999\,5$.
On obtient alors : $u_{0,001} \simeq 3,290\,527$.

4. A l'aide d'une table, on repère les probabilités les plus proches de 0,99 et 0,999 5 et on obtient respectivement (2 décimales accessibles « seulement ») : $u_{0,02} \simeq 2,33$ et $u_{0,001} \simeq 3,29$.

N°62 page 386

1. **Réponse b.**
On peut bien sûr utiliser la calculatrice … mais on peut aussi remarquer que l'écart type de la loi normale considérée vaut $\sqrt{4} = 2$. L'intervalle considéré correspond donc à l'intervalle $\left[8-4\,;8+4\right] = \left[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma\right]$. D'où la réponse b ... ☺

2. **Réponse c.**
On peut effectuer une analyse plutôt qualitative de la situation en raisonnant sur la notion d'écart type : plus un écart type est élevé plus les probabilités des réalisations « éloignées » de l'espérance sont élevées. Ainsi, pour une probabilité donnée, il faudra considérer, pour la variable aléatoire *Y* un intervalle centré sur l'espérance de plus grande longueur que pour la variable aléatoire *X*. Alors, pour un tel intervalle centré sur l'espérance donné *I*, on aura $P\left(Y \in I\right) < P\left(X \in I\right)$, soit ici, avec $I = \left[\mu - \alpha\,;\,\mu + \alpha\right]$:
$P\left(Y \in \left[\mu - \alpha\,;\,\mu + \alpha\right]\right) < P\left(X \in \left[\mu - \alpha\,;\,\mu + \alpha\right]\right) = p$.

On peut aussi se ramener à des variables aléatoires centrées réduites.
On a : $X \in \left[\mu - \alpha\,;\,\mu + \alpha\right] \Leftrightarrow X - \mu \in \left[-\alpha\,;\,+\alpha\right] \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \in \left[-\frac{\alpha}{\sigma}\,;\,+\frac{\alpha}{\sigma}\right]$ et, de façon similaire : $Y \in \left[\mu - \alpha\,;\,\mu + \alpha\right] \Leftrightarrow \frac{Y-\mu}{\sigma'} \in \left[-\frac{\alpha}{\sigma'}\,;\,+\frac{\alpha}{\sigma'}\right]$.
Or les variables aléatoires $\frac{X-\mu}{\sigma}$ et $\frac{Y-\mu}{\sigma'}$ suivent toutes deux la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}\left(0\,;1\right)$. Comme $\sigma' > \sigma$, on a $\left[-\frac{\alpha}{\sigma'}\,;\,+\frac{\alpha}{\sigma'}\right] \subset \left[-\frac{\alpha}{\sigma}\,;\,+\frac{\alpha}{\sigma}\right]$ (l'inclusion est stricte) et donc : $P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma'} \in \left[-\frac{\alpha}{\sigma'}\,;\,+\frac{\alpha}{\sigma'}\right]\right) < P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \in \left[-\frac{\alpha}{\sigma}\,;\,+\frac{\alpha}{\sigma}\right]\right)$.
Soit, finalement : $P\left(Y \in \left[\mu - \alpha\,;\,\mu + \alpha\right]\right) < P\left(X \in \left[\mu - \alpha\,;\,\mu + \alpha\right]\right) = p$.

N°64 page 386

1. Comme l'espérance de la loi X vaut 18 et son écart type $\sqrt{9}=3$, on en déduit que la variable aléatoire $\frac{X-18}{3}$ soit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\,;1)$.

La variable aléatoire $\frac{X-18}{3}$ soit la loi normale centrée réduite.

2. Remarque : la table fournie page 399 est très partielle et on se reportera à une table plus complète (éventuellement construisez-la vous-même à l'aide d'un tableur !) pour évaluer certaines des probabilités demandées.

   a. $P(X \leq 21) = P(X-18 \leq 21-18) = P(X-18 \leq 3) = P\left(\frac{X-18}{3} \leq \frac{3}{3}\right) = P(Y \leq 1)$.

   Sur la table, on lit directement : $P(Y \leq 1) \simeq 0{,}841$.

   Si l'on ne dispose pas d'une table (ni d'une calculatrice !), on peut utiliser le fait que 1 est l'écart type de Y (une remarque similaire peut même être faite dès le départ puisque $P(X \leq 21) = P(X \leq 18+3) = P(X \leq \mu+\sigma)$) !

   Comme on a classiquement : $P(-1 \leq Y \leq 1) \simeq 0{,}683$, il vient

   $P(Y > 1) = \frac{1-P(-1 \leq Y \leq 1)}{2} \simeq \frac{1-0{,}683}{2} = 0{,}1585$ et donc :

$$P(Y \leq 1) = 1-P(Y > 1) \simeq 1-0{,}1585 = 0{,}8415$$

$P(X \leq 21) = P(Y \leq 1) \simeq 0{,}841$

   b. De façon similaire : $P(X \geq 24) = P(Y \geq 2)$.

   On a alors : $P(Y \geq 2) = 1-P(Y < 2) \simeq 1-0{,}977\,250 = 0{,}022\,750$.

   D'où : $P(X \geq 24) = P(Y \geq 2) \simeq 0{,}023$.

$P(X \geq 24) = P(Y \geq 2) \simeq 0{,}023$

   c. On a :

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 24) &= P(X \leq 24) - P(X < 21) \\ &= P(Y \leq 2) - P(Y < 1) \\ &= P(Y \leq 2) - P(Y \leq 1) \end{aligned}$$

Avec $P(Y \le 1) \simeq 0{,}841\,345$ et $P(Y \le 2) \simeq 0{,}977\,250$, on obtient :

$$P(Y \le 2) - P(Y \le 1) \simeq 0{,}977\,250 - 0{,}841\,345 = 0{,}135\,905$$

$$\boxed{P(21 \le X \le 24) = P(Y \le 2) - P(Y \le 1) \simeq 0{,}136}$$

d. Ne surtout pas se précipiter ! On a en effet :

$$P(X \ge 15) = P\left(\frac{X-18}{3} \ge -1\right) = P(Y \ge -1) = P(Y \le 1)$$

Valeur qui a été calculée à la question a.

$$\boxed{P(X \ge 15) = P(Y \le 1) \simeq 0{,}841}$$

e. Même remarque que précédemment :

$$P(15 \le X \le 21) = P\left(-1 \le \frac{X-18}{3} \le 1\right) = P(-1 \le Y \le 1) \simeq 0{,}683$$

$$\boxed{P(15 \le X \le 21) = P(-1 \le Y \le 1) \simeq 0{,}683}$$

N°83 page 392

1. Pour tout réel *t* positif, on a $t \ge 0$ et $e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$. On en déduit $t\,e^{-\frac{t^2}{2}} \ge 0$.

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur cet intervalle (la fonction polynôme $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$ et la fonction exponentielle).

Intéressons-nous maintenant à $\int_0^{+\infty} t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Soit *A* un réel positif.

La dérivée sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{R}_+$) de la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est la fonction $t \mapsto -t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ (dérivée d'une composée… En toute rigueur, ce calcul est hors programme… ☺). Ainsi, la fonction $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une primitive de la fonction *f* sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\int_0^A t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A = -e^{-\frac{A^2}{2}} - \left(-e^{-\frac{0^2}{2}}\right) = 1 - e^{-\frac{A^2}{2}}$$

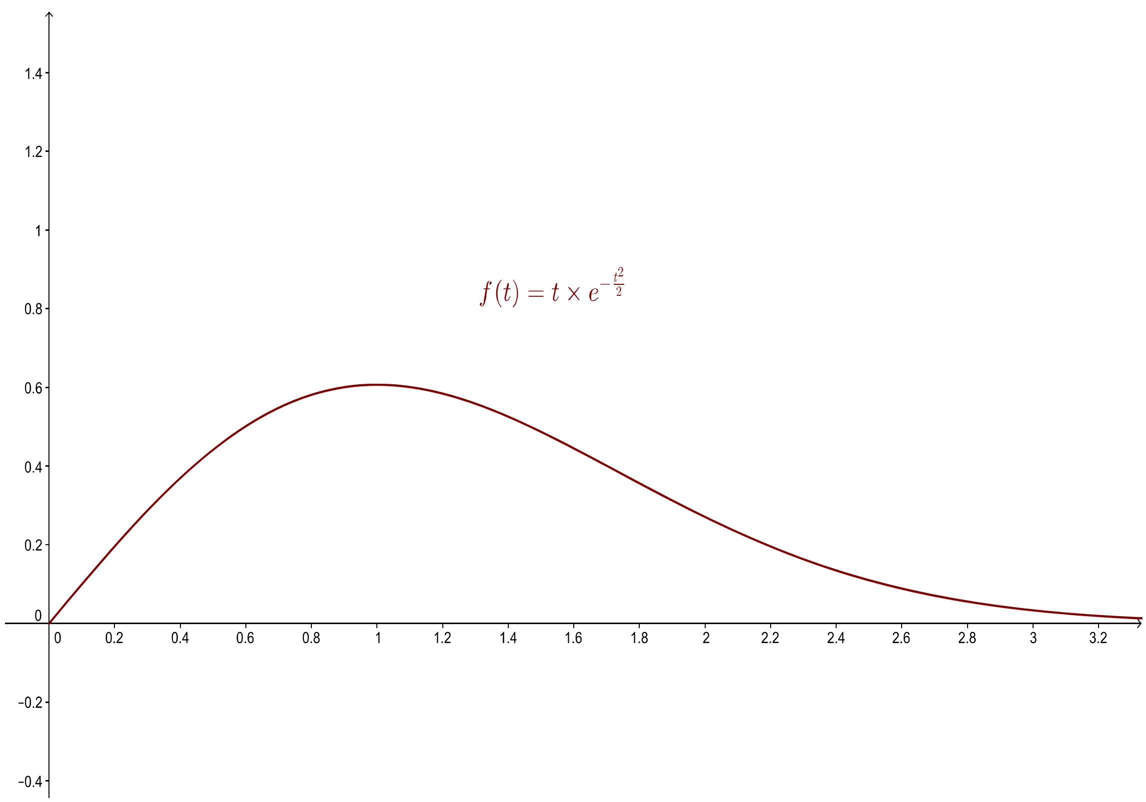
On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0\end{array}\right\} \overset{\text{composition}}{\Rightarrow} \lim\limits_{A\to+\infty}\left(e^{-\frac{A^2}{2}}\right)=0$$

Finalement : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$.

On a bien : $\int_0^{+\infty} t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}_+ .}$$



2. La variable aléatoire admettant la fonction *f* pour densité, on a, d'après les calculs de la question précédente : $P(X\le x)=\int_0^x t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel positif, } P(X\le x)=1-e^{-\frac{x^2}{2}} .}$$

Il vient alors : $P\left(X \in [0\,;1]\right) = P\left(X \leq 1\right) = 1 - e^{-\frac{1^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,39$.

$$\boxed{P\left(X \in [0\,;1]\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,39}$$

3. On a $P\left(X \in]a\,;+\infty[\right) = 1 - P\left(X \in [0\,;a]\right)$. D'où :

$$\begin{aligned} & P\left(X \in]a\,;+\infty[\right) = P\left(X \in [0\,;a]\right) \\ \Leftrightarrow\ & P\left(X \in [0\,;a]\right) = 1 - P\left(X \in [0\,;a]\right) \\ \Leftrightarrow\ & P\left(X \in [0\,;a]\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} P\left(X \in [0\,;a]\right) = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow P\left(X \leq a\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \\ & \Leftrightarrow e^{-\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow a^2 = 2\ln 2 \\ & \Leftrightarrow a = \sqrt{2\ln 2} \end{aligned}$$