

---

# Lois de probabilité continues.

Corrigés d'exercices

Version du 25/05/2014

---

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 367 : N°4

Page 382 : N°33, 34

Page 383 : N°41

Page 384 : N°49, 52

Page 385 : N°58

Page : N°

Page : N°

## **N°4 page 367**

Les événements  $(X \in [0, 4; 0, 9])$  et  $(X \in [0, 3; t])$  sont indépendants si, et seulement si, on a l'égalité :

$$P(X \in [0, 4; 0, 9] \cap [0, 3; t]) = P(X \in [0, 4; 0, 9]) \times P(X \in [0, 3; t]).$$

On a facilement :  $P(X \in [0, 4; 0, 9]) \times P(X \in [0, 3; t]) = (0, 9 - 0, 4) \times (t - 0, 3) = 0, 5 \times (t - 0, 3)$ .

L'intersection  $[0, 4; 0, 9] \cap [0, 3; t]$  dépend de la valeur de  $t$  ... alors que nous ne la connaissons pas !

- Si on suppose  $0, 3 \leq t \leq 0, 9$ , il vient :  $[0, 4; 0, 9] \cap [0, 3; t] = [0, 4; t]$ .
- Si on suppose  $0, 9 \leq t \leq 1$ , il vient :  $[0, 4; 0, 9] \cap [0, 3; t] = [0, 4; 0, 9]$ .

Le deuxième cas est à exclure puisqu'on aurait alors :

$$P(X \in [0, 4; 0, 9] \cap [0, 3; t]) = P(X \in [0, 4; 0, 9]) = 0, 9 - 0, 4 = 0, 5$$

On aurait alors :

$$\begin{aligned} P(X \in [0, 4; 0, 9] \cap [0, 3; t]) &= P(X \in [0, 4; 0, 9]) \times P(X \in [0, 3; t]) \\ &\Leftrightarrow 0, 5 = 0, 5 \times (t - 0, 3) \\ &\Leftrightarrow t = 1, 3 \end{aligned}$$

Résultat absurde puisque  $t$  est inférieur à 1.

On cherche donc  $t$  dans l'intervalle  $[0, 3; 0, 9]$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} P(X \in [0,4;0,9] \cap [0,3;t]) &= P(X \in [0,4;0,9]) \times P(X \in [0,3;t]) \\ \Leftrightarrow P(X \in [0,4;t]) &= P(X \in [0,4;0,9]) \times P(X \in [0,3;t]) \\ \Leftrightarrow t - 0,4 &= 0,5 \times (t - 0,3) \\ \Leftrightarrow t - 0,4 &= 0,5t - 0,15 \\ \Leftrightarrow 0,5t &= 0,25 \\ \Leftrightarrow t &= 0,5 \end{aligned}$$

Si  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0;1]$ , alors les événements  $(X \in [0,4;0,9])$  et  $(X \in [0,3;t])$  sont indépendants pour  $t = 0,5$ .

**N°33 page 382**

1. Soit  $a$  un réel supérieur à 1.

$$\text{On a : } \int_1^a k t^{-2} dt = k \int_1^a \frac{1}{t^2} dt = k \times \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^a = k \left( 1 - \frac{1}{a} \right).$$

$$\text{D'où : } \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a k t^{-2} dt = \int_1^{+\infty} k t^{-2} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ k \left( 1 - \frac{1}{a} \right) \right] = k.$$

Or, on veut  $\int_1^{+\infty} k t^{-2} dt = 1$ . On en déduit :  $k = 1$ .

La fonction  $f$  est une densité de probabilité pour  $k = 1$ .

2. D'après la question précédente, on a :  $f(t) = \frac{1}{t^2}$ .

$$\text{Il vient alors : } P([1;2]) = \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs :

$$P_{[2;5]}([3;5]) = \frac{P([3;5] \cap [2;5])}{P([2;5])} = \frac{P([3;5])}{P([2;5])} = \frac{\int_3^5 \frac{dt}{t^2}}{\int_2^5 \frac{dt}{t^2}} = \frac{\left[ -\frac{1}{t} \right]_3^5}{\left[ -\frac{1}{t} \right]_2^5} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{15} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P([1;2]) = \frac{1}{2} \text{ et } P_{[2;5]}([3;5]) = \frac{4}{9}.$$

**N°34 page 382**

La fonction  $f$  considérée est positive sur l'intervalle  $[0; 4]$ .

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(t) dt &= \int_0^2 f(t) dt + \int_2^{\frac{5}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 f(t) dt \\ &= \int_0^2 \frac{1}{4} dt + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{1}{6} dt \\ &= \frac{1}{4} \times (2-0) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2} - 2\right) + \frac{1}{6} \times \left(4 - \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

Des deux points précédents, on déduit :

La fonction  $f$  est une densité sur l'intervalle  $[0; 4]$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}P([1; 3]) &= \int_1^3 f(t) dt \\ &= \int_1^2 f(t) dt + \int_2^{\frac{5}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 f(t) dt \\ &= \int_1^2 \frac{1}{4} dt + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{1}{6} dt \\ &= \frac{1}{4} \times (2-1) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2} - 2\right) + \frac{1}{6} \times \left(3 - \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{7}{12}\end{aligned}$$

On a ensuite :

$$P_{[2;4]}([2; 3]) = \frac{P([2; 3] \cap [2; 4])}{P([2; 4])} = \frac{P([2; 3])}{P([2; 4])}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P([2; 3]) &= \int_2^3 f(t) dt & P([2; 4]) &= \int_2^4 f(t) dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 f(t) dt & &= \int_2^{\frac{5}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 f(t) dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{1}{6} dt & &= \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{1}{6} dt \\ &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{5}{2} - 2 \right) + \frac{1}{6} \times \left( 3 - \frac{5}{2} \right) & \text{et} &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{5}{2} - 2 \right) + \frac{1}{6} \times \left( 4 - \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} & &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } P_{[2;4]}([2;3]) = \frac{P([2;3])}{P([2;4])} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$$

$$P([1;3]) = \frac{7}{12} \text{ et } P_{[2;4]}([2;3]) = \frac{2}{3}.$$

**N°41 page 383**

1. Soit  $m$  dans l'intervalle  $[a; b]$  tel que  $P(X \leq m) = P(X \geq m)$ .

Notons dans un premier temps que l'on a :  $P(X \leq m) + P(X \geq m) = P([a; b]) = 1$ .

On cherche donc  $m$  tel que :  $P(X \leq m) = P(X \geq m) = \frac{1}{2}$ .

Cette démarche, très générale, permet d'obtenir la médiane de la loi considérée.

On a d'abord :  $P(X \leq m) = P(X \geq m) \Leftrightarrow P(X \in [a; m]) = P(X \in [m; b])$ .

$X$  suivant une loi uniforme que l'intervalle  $[a; b]$ , il vient immédiatement :

$$P(X \in [a; m]) = \frac{m-a}{b-a} \text{ et } P(X \in [m; b]) = \frac{b-m}{b-a}$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(X \in [a; m]) &= P(X \in [m; b]) \\ \Leftrightarrow \frac{m-a}{b-a} &= \frac{b-m}{b-a} \Leftrightarrow m-a = b-m \\ \Leftrightarrow 2m &= a+b \Leftrightarrow m = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Finalement, on a :  $P(X \leq m) = P(X \geq m)$  pour  $m = \frac{a+b}{2}$ .

Si une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme sur un intervalle  $[a; b]$  ( $a < b$ )

alors on a :  $P(X \leq m) = P(X \geq m) \Leftrightarrow m = \frac{a+b}{2}$ .

Remarque : pour  $m = \frac{a+b}{2}$ , on a bien  $\frac{m-a}{b-a} = \frac{b-m}{b-a} = \frac{1}{2}$ .

2. On a immédiatement  $m = \frac{a+b}{2} = E(X)$ .

Résultat classique pour toute loi uniforme.

$m = \frac{a+b}{2} = E(X)$

**N°49 page 384**

Soit  $T$  la variable aléatoire désignant la durée de vie de l'appareil. D'après l'énoncé,  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Comme l'espérance de  $T$  vaut  $\frac{1}{\lambda}$ , on cherche ici :  $P\left(T \geq \frac{2}{\lambda}\right)$ .

On a, pour tout réel positif  $a$  :  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ . Il vient donc :

$$P\left(T \geq \frac{2}{\lambda}\right) = e^{-\lambda \times \frac{2}{\lambda}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,135$$

La probabilité que la durée de vie de l'appareil soit supérieure ou égale au double de son espérance vaut  $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$  soit environ 0,135.

**N°52 page 384**

1. Pour tous réels positifs  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ , on a classiquement :

$$P(X \in [a; b]) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

D'où :

$$P(X \in [1; 2]) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-\lambda} - (e^{-\lambda})^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (e^{-\lambda})^2 - e^{-\lambda} + \frac{1}{4} = 0$$

En posant, comme suggéré,  $x = e^{-\lambda}$ , il vient :

$$\begin{aligned} P(X \in [1; 2]) &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow (e^{-\lambda})^2 - e^{-\lambda} + \frac{1}{4} = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda = -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \ln 2 \end{aligned}$$

Pour une variable aléatoire  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , on a :

$$P(X \in [1; 2]) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$$

2. Comme  $\lambda = \ln 2$ , on a :  $\frac{\ln 2}{\lambda} = 1$ . Ainsi, la demi vie associée à la variable aléatoire  $X$  est égale à 1. On en déduit immédiatement :  $P(X > 1)$ .

$$P(X > 1)$$

**N°58 page 385**

Notons d'abord que l'on a :  $R(t) = P(X < t) = P(X \leq t)$ .

1. On a, pour tout réel  $t$  strictement positif :  $]-\infty; t] = ]-\infty; -t[ \cup [-t; t]$  et  $]-\infty; -t[ \cap [-t; t] = \emptyset$ .

On en déduit :  $P(X \in ]-\infty; t]) = P(X \in ]-\infty; -t[) + P(X \in [-t; t])$ .

D'où :

$$\begin{aligned}P(X \in [-t; t]) &= P(X \in ]-\infty; t]) - P(X \in ]-\infty; -t[) \\ &= P(X \leq t) - P(X < -t) \\ &= R(t) - P(X < -t)\end{aligned}$$

Mais de la parité de la densité de la loi normale centrée réduite on tire :

$$P(X < -t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - R(t)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}P(X \in [-t; t]) &= R(t) - P(X < -t) \\ &= R(t) - [1 - R(t)] \\ &= 2R(t) - 1\end{aligned}$$

Si  $X$  suit la loi normale centrée réduite, on a, pour tout  $t$  strictement positif :

$$P(X \in [-t; t]) = 2R(t) - 1$$

2. Pour tout réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; 1[$ , il vient alors :

$$\begin{aligned}P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow P(X \in [-u_\alpha; u_\alpha]) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow 2R(u_\alpha) - 1 &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow 2R(u_\alpha) &= 2 - \alpha \\ \Leftrightarrow R(u_\alpha) &= 1 - \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

$$\forall \alpha \in ]0; 1[, P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow R(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

3. a. Pour  $\alpha = 0,05$  on a :  $R(u_{0,05}) = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ .

On obtient alors :  $u_{0,05} \approx 1,96$  (valeur très classique à connaître).

b. Pour  $\alpha = 0,02$  on a :  $R(u_{0,02}) = 1 - \frac{0,02}{2} = 1 - 0,01 = 0,99$ .

On obtient alors :  $u_{0,02} \approx 2,326\ 348$ .

Pour  $\alpha = 0,001$  on a :  $R(u_{0,001}) = 1 - \frac{0,001}{2} = 1 - 0,0005 = 0,9995$ .

On obtient alors :  $u_{0,001} \approx 3,290527$ .

4. A l'aide d'une table, on repère les probabilités les plus proches de 0,99 et 0,9995 et on obtient respectivement (2 décimales accessibles « seulement ») :  $u_{0,02} \approx 2,33$  et

$u_{0,001} \approx 3,29$ .