
Produit scalaire dans l'espace.

Corrigés d'exercices

Version du 13/05/2014

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 306 : N°22

Page 307 : N°27

Page 308 : N°36

Page 309 : N°40

N°22 page 306

1. Par lecture graphique des coordonnées du point B (on lit $\overrightarrow{OB} = 8\vec{j}$), par définition du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et en tenant compte du fait que $OADBCFGE$ est un cube, il vient : $A(8; 0; 0)$.

On a alors : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 8\vec{j} + 8\vec{k}$. Donc : $E(0; 8; 8)$.

On a :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = 8\vec{j} + \frac{1}{2} \times 8\vec{k} + \frac{1}{2} \times 8\vec{i} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

Donc : $I(4; 8; 4)$.

Le point K est défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}$.

On a donc : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF})$ puis : $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OF}$.

Il nous faut donc les coordonnées des points A (nous les avons !) et F .

Pour le point F , on a facilement : $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 8\vec{i} + 8\vec{k}$.

Ainsi : $F(8; 0; 8)$.

On a alors : $K\left(\frac{3}{4} \times 8 + \frac{1}{4} \times 8; \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0; \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 8\right)$ soit $K(8; 0; 2)$.

Le point L est défini par : $\overrightarrow{CL} = \frac{5}{8}\overrightarrow{CE}$.

On a donc : $\overline{CO} + \overline{OL} = \frac{5}{8}(\overline{CO} + \overline{OE})$ puis : $\overline{OL} = \frac{3}{8}\overline{OC} + \frac{5}{8}\overline{OE}$.

On a immédiatement $C(0; 0; 8)$ et nous avons obtenu ci-dessus $E(0; 8; 8)$.

On a alors : $L\left(\frac{3}{8} \times 0 + \frac{5}{8} \times 0; \frac{3}{8} \times 0 + \frac{5}{8} \times 8; \frac{3}{8} \times 8 + \frac{5}{8} \times 8\right)$ soit : $L(0; 5; 8)$.

En définitive :

$$A(8; 0; 0), E(0; 8; 8), I(4; 8; 4), K(8; 0; 2) \text{ et } L(0; 5; 8).$$

2. A partir de $A(8; 0; 0)$ et $E(0; 8; 8)$, on a immédiatement : $\overline{AE}(0-8; 8-0; 8-0)$, soit : $\overline{AE}(-8; 8; 8)$. Il vient alors, le repère considéré étant orthonormé :

$$\|\overline{AE}\| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 8^2} = \sqrt{3 \times 8^2} = 8\sqrt{3}$$

$$\|\overline{AE}\| = 8\sqrt{3}$$

A partir de là, on a immédiatement : $\vec{e} = \frac{1}{\|\overline{AE}\|} \overline{AE}$ d'où :

$$\vec{e} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

3. A partir de $I(4; 8; 4)$, $K(8; 0; 2)$ et $L(0; 5; 8)$, on a facilement :

$$\overline{IK}(4; -8; -2) \text{ et donc : } IK^2 = \|\overline{IK}\|^2 = 4^2 + (-8)^2 + (-2)^2 = 16 + 64 + 4 = 84$$

$$\overline{IL}(-4; -3; 4) \text{ et donc : } IL^2 = \|\overline{IL}\|^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + 4^2 = 16 + 9 + 16 = 41$$

$$\overline{KL}(-8; 5; 6) \text{ et donc : } KL^2 = \|\overline{KL}\|^2 = (-8)^2 + 5^2 + 6^2 = 64 + 25 + 36 = 125$$

Comme $KL^2 = IK^2 + IL^2$, il vient, d'après la réciproque du théorème de Pythagore :

Le triangle IKL est rectangle en I .

4. a. Un point $M(x; y; z)$ du plan appartient à la sphère S de centre Ω passant par O si, et seulement si, on a : $\Omega M = \Omega O$.
Soit encore : $\Omega M^2 = \Omega O^2$.

Comme le repère considéré est orthonormal, il vient : $\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$
et $\Omega O^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 12$.

Une équation cartésienne de la sphère S de centre $\Omega(2; 2; 2)$ et passant par O est :

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$$

b. Erreur dans l'énoncé, le cube considéré n'est pas inscrit dans la sphère S .

Rappelons qu'un cube est inscrit dans une sphère si chacun de ses 8 sommets est un point de la sphère. On vérifie aisément ici que les coordonnées du point $G(8; 8; 8)$ ne vérifient pas l'équation obtenue ci-dessus.

De fait, l'énoncé « devient » correct si on considère plutôt $\Omega(4; 4; 4)$...

N°27 page 307

Comme le tétraèdre $ABCD$ est régulier, les triangles ABC et DBC sont équilatéraux. Les droites (AI) et (DI) en sont les hauteurs respectivement issues des sommets A et D .

Si nous notons a la longueur des arêtes du tétraèdre, on a classiquement : $AI = DI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\overline{IA} \cdot \overline{ID} &= IA \times ID \times \cos(\widehat{AID}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \times \cos \widehat{AID} = \frac{3}{4}a^2 \times \cos \widehat{AID} \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\overline{IA}\|^2 + \|\overline{ID}\|^2 - \|\overline{IA} - \overline{ID}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(IA^2 + ID^2 - \|\overline{DA}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2 \right) = \frac{1}{4}a^2\end{aligned}$$

Il vient alors : $\frac{3}{4}a^2 \times \cos \widehat{AID} = \frac{1}{4}a^2$ et donc : $\cos \widehat{AID} = \frac{1}{3}$. D'où : $\widehat{AID} \simeq 71^\circ$ (valeur approchée par excès au degré près).

$$\widehat{AID} \simeq 71^\circ$$

(valeur approchée par excès au degré près)

N°36 page 308

Comme l'espace est rapporté à un repère orthonormé, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 &= \vec{u}^2 = (\cos \alpha \cos \beta)^2 + (\cos \alpha \sin \beta)^2 + (\sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \alpha \times \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \times \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \\ &= \underbrace{(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)}_{=1} \times \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1\end{aligned}$$

D'où : $\|\vec{u}\| = 1$. Le vecteur \vec{u} est bien unitaire.

Dans un repère orthonormé, pour tous réels α et β ,
le vecteur $\vec{u}(\cos \alpha \cos \beta ; \cos \alpha \sin \beta ; \sin \alpha)$ est unitaire.

N°40 page 309

1. On peut procéder de diverses façons.

En utilisant les propriétés algébriques du produit scalaire (c'est ce qui est ici attendu), il vient :

$$\begin{aligned}\overline{BC} \cdot \overline{IH} &= \overline{BC} \cdot (\overline{IE} + \overline{EH}) = \underbrace{\overline{BC} \cdot \overline{IE}}_{=0} + \overline{BC} \cdot \overline{EH} = \overline{BC} \cdot \overline{BC} = BC^2 = AD^2 = 4^2 = 16 \\ \overline{BJ} \cdot \overline{FA} &= (\overline{BE} + \overline{EJ}) \cdot \overline{FA} = \underbrace{\overline{BE} \cdot \overline{FA}}_{=0} + \underbrace{\overline{EJ} \cdot \overline{FA}}_{=0} = 0 \\ \overline{JI} \cdot \overline{JG} &= (\overline{JE} + \overline{EI}) \cdot (\overline{JH} + \overline{HG}) = \overline{JE} \cdot \overline{JH} + \underbrace{\overline{JE} \cdot \overline{HG}}_{=0} + \underbrace{\overline{EI} \cdot \overline{JH}}_{=0} + \overline{EI} \cdot \overline{HG} \\ &= -JE^2 + \overline{EI} \cdot \overline{EF} = -2^2 + EF \times \frac{1}{2} EF = -4 + \frac{1}{2} \times 2^2 = -4 + 2 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{IH} = 16, \overline{BJ} \cdot \overline{FA} = 0 \text{ et } \overline{JI} \cdot \overline{JG} = -2.$$

A titre de comparaison, on peut aussi effectuer les calculs à l'aide de coordonnées. Pour ce faire, on peut rapporter l'espace au repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i} = \frac{1}{2} \overline{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4} \overline{AD}$ et

$$\vec{k} = \frac{1}{2} \overline{AE}.$$

On a alors :

- $\overline{AB} = 2\vec{i}$ et donc $B(2; 0; 0)$.
- $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2\vec{i} + \overline{AD} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ et donc : $C(2; 4; 0)$.
- $\overline{AD} = 4\vec{j}$ et donc : $D(0; 4; 0)$.
- $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{BF} = 2\vec{i} + \overline{AE} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ et donc : $F(2; 0; 2)$.
- $\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AF}$ et donc : $I(1; 0; 1)$.
- $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ et donc $G(2; 4; 2)$.
- $\overline{AH} = \overline{AD} + \overline{DH} = \overline{AD} + \overline{AE} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$ et donc : $H(0; 4; 2)$.
- $\overline{AJ} = \overline{AE} + \overline{EJ} = \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{EH} = \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AD} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et donc $J(0; 2; 2)$.

On a alors :

$\overline{BC}(-2; 2; 2)$ et $\overline{IH}(-1; 4; 1)$ et donc :

$$\overline{BC} \cdot \overline{IH} = 0 \times (-1) + 4 \times 4 + 0 \times 1 = 16$$

$\overline{BJ}(0; 4; 0)$ et $\overline{FA}(-2; 0; -2)$ et donc :

$$\overline{BC} \cdot \overline{IH} = 0 \times (-2) + 4 \times 0 + 0 \times (-2) = 0$$

$\overline{JI}(1; -2; -1)$ et $\overline{JG}(2; 2; 0)$ et donc :

$$\overline{JI} \cdot \overline{JG} = 1 \times 2 + (-2) \times 2 + (-1) \times 0 = -2$$

On retrouve les résultats obtenus précédemment ...

2. On a : $\overline{JI} \cdot \overline{JG} = -2 = JI \times JG \times \cos(\widehat{JI, JG}) = JI \times JG \times \cos \widehat{IJG}$.

Dans le triangle IEJ rectangle en E , on a : $EI = \frac{1}{2} \times EB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 = \sqrt{2}$ et

$$EJ = \frac{1}{2} \times ED = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

Alors, d'après le théorème de Pythagore : $IJ = \sqrt{IE^2 + EJ^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$.

Dans le triangle JHG rectangle en H , on a : $JH = \frac{1}{2} \times EH = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ et $HG = 2$.

Alors, d'après le théorème de Pythagore : $JG = \sqrt{HJ^2 + HG^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

On a donc : $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG} = -2 = \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \cos \widehat{IJG}$.

D'où : $\cos \widehat{IJG} = \frac{-2}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ puis $\widehat{IJG} \approx 106,8^\circ$ (valeur approchée à $0,1^\circ$ près).

$\widehat{IJG} \approx 106,8^\circ$ (valeur approchée à $0,1^\circ$ près).
--