
Produit scalaire dans l'espace.

Corrigés d'exercices

Version du 17/05/2014

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 306 : N°22

Page 307 : N°27

Page 308 : N°36

Page 309 : N°40

Page 312 : N°66, 68, 72

Page 313 : N°79

Page 316 : N°86

N°22 page 306

1. Par lecture graphique des coordonnées du point B (on lit $\overrightarrow{OB} = 8\vec{j}$), par définition du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et en tenant compte du fait que $OADBCFGE$ est un cube, il vient : $A(8; 0; 0)$.

On a alors : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 8\vec{j} + 8\vec{k}$. Donc : $E(0; 8; 8)$.

On a :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = 8\vec{j} + \frac{1}{2} \times 8\vec{k} + \frac{1}{2} \times 8\vec{i} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

Donc : $I(4; 8; 4)$.

Le point K est défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}$.

On a donc : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF})$ puis : $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OF}$.

Il nous faut donc les coordonnées des points A (nous les avons !) et F .

Pour le point F , on a facilement : $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 8\vec{i} + 8\vec{k}$.

Ainsi : $F(8; 0; 8)$.

On a alors : $K\left(\frac{3}{4} \times 8 + \frac{1}{4} \times 8; \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0; \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 8\right)$ soit $K(8; 0; 2)$.

Le point L est défini par : $\overrightarrow{CL} = \frac{5}{8}\overrightarrow{CE}$.

On a donc : $\overline{CO} + \overline{OL} = \frac{5}{8}(\overline{CO} + \overline{OE})$ puis : $\overline{OL} = \frac{3}{8}\overline{OC} + \frac{5}{8}\overline{OE}$.

On a immédiatement $C(0; 0; 8)$ et nous avons obtenu ci-dessus $E(0; 8; 8)$.

On a alors : $L\left(\frac{3}{8} \times 0 + \frac{5}{8} \times 0; \frac{3}{8} \times 0 + \frac{5}{8} \times 8; \frac{3}{8} \times 8 + \frac{5}{8} \times 8\right)$ soit : $L(0; 5; 8)$.

En définitive :

$A(8; 0; 0), E(0; 8; 8), I(4; 8; 4), K(8; 0; 2)$ et $L(0; 5; 8)$.

2. A partir de $A(8; 0; 0)$ et $E(0; 8; 8)$, on a immédiatement : $\overline{AE}(0-8; 8-0; 8-0)$, soit : $\overline{AE}(-8; 8; 8)$. Il vient alors, le repère considéré étant orthonormé :

$$\|\overline{AE}\| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 8^2} = \sqrt{3 \times 8^2} = 8\sqrt{3}$$

$\|\overline{AE}\| = 8\sqrt{3}$

A partir de là, on a immédiatement : $\vec{e} = \frac{1}{\|\overline{AE}\|} \overline{AE}$ d'où :

$\vec{e} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

3. A partir de $I(4; 8; 4)$, $K(8; 0; 2)$ et $L(0; 5; 8)$, on a facilement :

$$\overline{IK}(4; -8; -2) \text{ et donc : } IK^2 = \|\overline{IK}\|^2 = 4^2 + (-8)^2 + (-2)^2 = 16 + 64 + 4 = 84$$

$$\overline{IL}(-4; -3; 4) \text{ et donc : } IL^2 = \|\overline{IL}\|^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + 4^2 = 16 + 9 + 16 = 41$$

$$\overline{KL}(-8; 5; 6) \text{ et donc : } KL^2 = \|\overline{KL}\|^2 = (-8)^2 + 5^2 + 6^2 = 64 + 25 + 36 = 125$$

Comme $KL^2 = IK^2 + IL^2$, il vient, d'après la réciproque du théorème de Pythagore :

Le triangle IKL est rectangle en I .

4. a. Un point $M(x; y; z)$ du plan appartient à la sphère S de centre Ω passant par O si, et seulement si, on a : $\Omega M = \Omega O$.
Soit encore : $\Omega M^2 = \Omega O^2$.

Comme le repère considéré est orthonormal, il vient : $\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$
et $\Omega O^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 12$.

Une équation cartésienne de la sphère S de centre $\Omega(2; 2; 2)$ et passant par O est :

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$$

b. Erreur dans l'énoncé, le cube considéré n'est pas inscrit dans la sphère S .

Rappelons qu'un cube est inscrit dans une sphère si chacun de ses 8 sommets est un point de la sphère. On vérifie aisément ici que les coordonnées du point $G(8; 8; 8)$ ne vérifient pas l'équation obtenue ci-dessus.

De fait, l'énoncé « devient » correct si on considère plutôt $\Omega(4; 4; 4)$...

N°27 page 307

Comme le tétraèdre $ABCD$ est régulier, les triangles ABC et DBC sont équilatéraux. Les droites (AI) et (DI) en sont les hauteurs respectivement issues des sommets A et D .

Si nous notons a la longueur des arêtes du tétraèdre, on a classiquement : $AI = DI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\overline{IA} \cdot \overline{ID} &= IA \times ID \times \cos(\widehat{AID}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \times \cos \widehat{AID} = \frac{3}{4}a^2 \times \cos \widehat{AID} \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\overline{IA}\|^2 + \|\overline{ID}\|^2 - \|\overline{IA} - \overline{ID}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(IA^2 + ID^2 - \|\overline{DA}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2 \right) = \frac{1}{4}a^2\end{aligned}$$

Il vient alors : $\frac{3}{4}a^2 \times \cos \widehat{AID} = \frac{1}{4}a^2$ et donc : $\cos \widehat{AID} = \frac{1}{3}$. D'où : $\widehat{AID} \approx 71^\circ$ (valeur approchée par excès au degré près).

$$\widehat{AID} \approx 71^\circ$$

(valeur approchée par excès au degré près)

N°36 page 308

Comme l'espace est rapporté à un repère orthonormé, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 &= \vec{u}^2 = (\cos \alpha \cos \beta)^2 + (\cos \alpha \sin \beta)^2 + (\sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \alpha \times \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \times \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \\ &= \underbrace{(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)}_{=1} \times \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1\end{aligned}$$

D'où : $\|\vec{u}\| = 1$. Le vecteur \vec{u} est bien unitaire.

Dans un repère orthonormé, pour tous réels α et β ,
le vecteur $\vec{u}(\cos \alpha \cos \beta ; \cos \alpha \sin \beta ; \sin \alpha)$ est unitaire.

N°40 page 309

1. On peut procéder de diverses façons.

En utilisant les propriétés algébriques du produit scalaire (c'est ce qui est ici attendu), il vient :

$$\begin{aligned}\overline{BC} \cdot \overline{IH} &= \overline{BC} \cdot (\overline{IE} + \overline{EH}) = \underbrace{\overline{BC} \cdot \overline{IE}}_{=0} + \overline{BC} \cdot \overline{EH} = \overline{BC} \cdot \overline{BC} = BC^2 = AD^2 = 4^2 = 16 \\ \overline{BJ} \cdot \overline{FA} &= (\overline{BE} + \overline{EJ}) \cdot \overline{FA} = \underbrace{\overline{BE} \cdot \overline{FA}}_{=0} + \underbrace{\overline{EJ} \cdot \overline{FA}}_{=0} = 0 \\ \overline{JI} \cdot \overline{JG} &= (\overline{JE} + \overline{EI}) \cdot (\overline{JH} + \overline{HG}) = \overline{JE} \cdot \overline{JH} + \underbrace{\overline{JE} \cdot \overline{HG}}_{=0} + \underbrace{\overline{EI} \cdot \overline{JH}}_{=0} + \overline{EI} \cdot \overline{HG} \\ &= -JE^2 + \overline{EI} \cdot \overline{EF} = -2^2 + EF \times \frac{1}{2} EF = -4 + \frac{1}{2} \times 2^2 = -4 + 2 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{IH} = 16, \overline{BJ} \cdot \overline{FA} = 0 \text{ et } \overline{JI} \cdot \overline{JG} = -2.$$

A titre de comparaison, on peut aussi effectuer les calculs à l'aide de coordonnées. Pour ce faire, on peut rapporter l'espace au repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i} = \frac{1}{2} \overline{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4} \overline{AD}$ et

$$\vec{k} = \frac{1}{2} \overline{AE}.$$

On a alors :

- $\overline{AB} = 2\vec{i}$ et donc $B(2; 0; 0)$.
- $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2\vec{i} + \overline{AD} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ et donc : $C(2; 4; 0)$.
- $\overline{AD} = 4\vec{j}$ et donc : $D(0; 4; 0)$.
- $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{BF} = 2\vec{i} + \overline{AE} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ et donc : $F(2; 0; 2)$.
- $\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AF}$ et donc : $I(1; 0; 1)$.
- $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ et donc $G(2; 4; 2)$.
- $\overline{AH} = \overline{AD} + \overline{DH} = \overline{AD} + \overline{AE} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$ et donc : $H(0; 4; 2)$.
- $\overline{AJ} = \overline{AE} + \overline{EJ} = \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{EH} = \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AD} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et donc $J(0; 2; 2)$.

On a alors :

$\overline{BC}(-2; 2; 2)$ et $\overline{IH}(-1; 4; 1)$ et donc :

$$\overline{BC} \cdot \overline{IH} = 0 \times (-1) + 4 \times 4 + 0 \times 1 = 16$$

$\overline{BJ}(0; 4; 0)$ et $\overline{FA}(-2; 0; -2)$ et donc :

$$\overline{BC} \cdot \overline{IH} = 0 \times (-2) + 4 \times 0 + 0 \times (-2) = 0$$

$\overline{JI}(1; -2; -1)$ et $\overline{JG}(2; 2; 0)$ et donc :

$$\overline{JI} \cdot \overline{JG} = 1 \times 2 + (-2) \times 2 + (-1) \times 0 = -2$$

On retrouve les résultats obtenus précédemment ...

2. On a : $\overline{JI} \cdot \overline{JG} = -2 = JI \times JG \times \cos(\widehat{JI, JG}) = JI \times JG \times \cos \widehat{IJG}$.

Dans le triangle IEJ rectangle en E , on a : $EI = \frac{1}{2} \times EB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 = \sqrt{2}$ et

$$EJ = \frac{1}{2} \times ED = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

Alors, d'après le théorème de Pythagore : $IJ = \sqrt{IE^2 + EJ^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$.

Dans le triangle JHG rectangle en H , on a : $JH = \frac{1}{2} \times EH = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ et $HG = 2$.

Alors, d'après le théorème de Pythagore : $JG = \sqrt{HJ^2 + HG^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

On a donc : $\overline{JI} \cdot \overline{JG} = -2 = \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \cos \widehat{IJG}$.

D'où : $\cos \widehat{IJG} = \frac{-2}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ puis $\widehat{IJG} \approx 106,8^\circ$ (valeur approchée à 0,1° près).

$\widehat{IJG} \approx 106,8^\circ$ (valeur approchée à 0,1° près).

N°66 page 312

Classiquement, les équations cartésiennes des plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} vont nous permettre d'obtenir une représentation paramétrique de leur droite d'intersection \mathcal{D} .

$$\begin{aligned}
 M(x; y; z) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ 2x - y = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ 3x = 2z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ x = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z - x \\ x = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z - \left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\right) \\ x = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} \\ z = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dans le système ainsi obtenu, la cote « z » joue le rôle du paramètre et on a immédiatement, comme vecteur directeur de \mathcal{D} : $\vec{u} \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1 \right)$, ou $\vec{v} = 3\vec{u} (2; 1; 3)$.

La droite d'intersection \mathcal{D} , intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} admet pour vecteur directeur $\vec{v} (2; 1; 3)$.

N°68 page 312

- Soit \mathcal{P} le plan le plan perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par A.
Tout vecteur directeur de \mathcal{D} est un vecteur normal de \mathcal{P} .

D'après la représentation paramétrique de \mathcal{D} , celle-ci admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(2; -1; -2)$.

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est donc de la forme : $2x - y - 2z + d = 0$.

Cette équation étant vérifiée par les coordonnées du point A, on a :

$$2 \times 1 - 4 - 2 \times 10 + d = 0, \text{ soit } -22 + d = 0 \text{ et } d = 22$$

$2x - y - 2z + 22 = 0$ est une équation cartésienne
du plan perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par A.

2. La distance cherchée est la distance AH où le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite \mathcal{D} , c'est-à-dire le point d'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite \mathcal{D} .

$$H(x; y; z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -2t \\ 2x - y - 2z + 22 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2(-1 + 2t) - (2 - t) - 2(-2t) + 22 = 0 \Leftrightarrow 9t + 18 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = -2$$

Pour $t = -2$, on obtient alors : $H(-1 + 2 \times (-2); 2 - (-2); -2 \times (-2))$, soit : $H(-5; 4; 4)$.

D'où : $\overrightarrow{AH}(-6; 0; -6)$ et donc : $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{2 \times 6^2} = 6\sqrt{2}$.

La distance du point A à la droite \mathcal{D} vaut : $6\sqrt{2}$.

3. Soit M le point de la droite \mathcal{D} de paramètre $t \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} AM &= \|\overrightarrow{AM}\| \\ &= f(t) \\ &= \sqrt{(-1 + 2t - 1)^2 + (2 - t - 4)^2 + (-2t - 10)^2} \\ &= \sqrt{(2t - 2)^2 + (t + 2)^2 + (2t + 10)^2} \\ &= \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + t^2 + 4t + 4 + 4t^2 + 40t + 100} \\ &= \sqrt{9t^2 + 36t + 108} \\ &= \sqrt{9(t^2 + 4t + 12)} \\ &= 3\sqrt{t^2 + 4t + 12} \end{aligned}$$

La fonction f est de la forme $f = 3\sqrt{u}$ avec $u : t \mapsto t^2 + 4t + 12$.

Le discriminant du trinôme $t^2 + 4t + 12$ est strictement négatif et on a : $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) > 0$.

La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R} et on a : $f' = 3 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3u'}{2\sqrt{u}}$.

Comme : $u' : t \mapsto 2t + 4 = 2(t + 2)$, il vient :

$$f'(t) = \frac{3 \times 2(t+2)}{2\sqrt{t^2 + 4t + 12}} = 3 \frac{t+2}{\sqrt{t^2 + 4t + 12}}$$

Le signe de $f'(t)$ est donc celui de $t + 2$. On en déduit immédiatement que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$. Elle admet donc un minimum pour $t = -2$. On retrouve ainsi le point obtenu à la question précédente.

Le minimum de la distance AM , où M est le point de la droite \mathcal{D} de paramètre t , est obtenu pour la valeur -2 du paramètre.

N°72 page 312

1. A partir des coefficients de x , y et z dans l'équation cartésienne du plan \mathcal{P} , on a immédiatement :

Le vecteur $\vec{n}(2; 1; -2)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

2. Pour montrer que \vec{u} est un vecteur du plan \mathcal{P} , il suffit de montrer que \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux. Comme nous travaillons dans un repère orthonormé, il vient immédiatement : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-2) = 2 - 2 = 0$.

Comme le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{n}$ est nul, les vecteurs \vec{u} et \vec{n} sont bien orthogonaux.

\vec{u} est un vecteur du plan \mathcal{P} .

3. Nous commençons par chercher un vecteur \vec{v} (pas nécessairement unitaire) orthogonal à \vec{u} et à \vec{n} . Posons $\vec{v}(x; y; z)$.

On a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 1 \times x + 0 \times y + 1 \times z = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$
- $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2 \times x + 1 \times y + (-2) \times z = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z = 0$

Ainsi, on a : \vec{v} orthogonal à \vec{u} et à \vec{n} si, et seulement si :
$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ 2x+y-2(-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ 4x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=-4x \end{cases}$$

D'où : $\vec{v}(x; -4x; -x)$ où x est un réel quelconque.

En choisissant $\vec{v} \neq \vec{0}$, c'est-à-dire $x \neq 0$, $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base orthogonale.

Pr exemple, avec $x=1$: $\vec{v}(1; -4; -1)$.

Pour obtenir une base orthonormée à partir de la base orthogonale $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$, il suffit de « diviser » chacun des vecteurs par sa norme :

- $\vec{n}(2; 1; -2)$ a pour norme $\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.
- $\vec{u}(1; 0; 1)$ a pour norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- $\vec{v}(1; -4; -1)$ a pour norme $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

En posant alors : $\vec{U} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \frac{1}{3} \vec{n}$, $\vec{V} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{u}$ et $\vec{W} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \vec{v}$, on a :

$$\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = \|\vec{W}\| = 1.$$

Par ailleurs, les vecteurs \vec{U} , \vec{V} et \vec{W} sont deux à deux orthogonaux puisque les vecteurs \vec{n} , \vec{u} et \vec{v} le sont.

En définitive, $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est bien une base orthonormée.

Les vecteurs $\vec{U}\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{V}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\vec{W}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}; -\frac{4}{3\sqrt{2}}; -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$
forment une base orthonormée de l'espace.

N°79 page 313

1. Si les plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) étaient parallèles, ils admettraient des vecteurs normaux colinéaires. Or le plan (\mathcal{P}) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}(2; -4; 3)$ et le plan (\mathcal{Q}) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{v}(1; -2; 3)$. Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles. Ils ne sont donc pas colinéaires. Donc :

Les plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) ne sont pas parallèles.

2. D'après la question précédente, les plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) sont sécants. Leur intersection est donc une droite, notée \mathcal{D} .

$$M(x; y; z) \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{Q}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 4y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -3z - 5 \\ x - 2y = -3z + 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y - 2(x - 2y) = -3z - 5 - 2(-3z + 2) \\ x - 2y = -3z + 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3z - 9 \\ x - 2y = -3z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x - 2y = -9 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = 2y - 7 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ y = y \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

La droite \mathcal{D} , intersection des plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Remarque : la droite \mathcal{D} est donc incluse dans le plan d'équation $z = 3$. Elle passe par le point $P(-7; 0; 3)$ et admet comme vecteur directeur : $\vec{u}(2; 1; 0)$.

3. Le plan (\mathcal{R}) , perpendiculaire aux plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) , admet pour vecteur normal tout vecteur directeur de la droite d'intersection de (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) , c'est-à-dire de la droite \mathcal{D} . Ainsi, le vecteur $\vec{u}(2; 1; 0)$ est un vecteur normal au plan (\mathcal{R}) et celui-ci admet pour équation cartésienne : $2x + y + d = 0$.
Les coordonnées de $A(2; -2; 0)$ vérifient cette équation et on a : $2 \times 2 + (-2) + d = 0$, soit $d = -2$.

Une équation cartésienne du plan (\mathcal{R}) , perpendiculaire aux plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) et passant par le point $A(2; -2; 0)$ est : $2x + y - 2 = 0$.

N°86 page 316

1. Les vecteurs \vec{n} et \overline{AH} étant colinéaires, on a : $|\vec{n} \cdot \overline{AH}| = \|\vec{n}\| \times \|\overline{AH}\| = AH \times \|\vec{n}\|$.

Comme \vec{n} est le vecteur de coordonnées $(a; b; c)$ et que le repère est orthonormé, on a :

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Finalement :

$$|\vec{n} \cdot \overline{AH}| = AH \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2. Les vecteurs \overline{AH} et \vec{n} sont colinéaires. Il existe donc un réel λ tel que $\overline{AH} = \lambda \vec{n}$.

On a alors : $\vec{n} \cdot \overline{AH} = \vec{n} \cdot (\lambda \vec{n}) = \lambda \vec{n}^2 = \lambda (a^2 + b^2 + c^2)$.

Posons $H(x_H; y_H; z_H)$. Il vient : $\overline{AH}(x_H - x_0; y_H - y_0; z_H - z_0)$.

$$\text{On a alors : } \overline{AH} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - x_0 = a\lambda \\ y_H - y_0 = b\lambda \\ z_H - z_0 = c\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = x_0 + a\lambda \\ y_H = y_0 + b\lambda \\ z_H = z_0 + c\lambda \end{cases}$$

Le point H étant un point du plan \mathcal{P} , ses coordonnées en vérifient l'équation cartésienne fournie. On a donc : $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$, soit :

$$a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c(z_0 + c\lambda) + d = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c(z_0 + c\lambda) + d &= 0 \\ \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d + (a^2 + b^2 + c^2)\lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)\lambda &= -ax_0 - by_0 - cz_0 - d \end{aligned}$$

Finalement : $\vec{n} \cdot \overline{AH} = \lambda \vec{n}^2 = \lambda (a^2 + b^2 + c^2) = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.

$$\vec{n} \cdot \overline{AH} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$$

3. A l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes, on a :

$$AH \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |\vec{n} \cdot \overline{AH}| = |-ax_0 - by_0 - cz_0 - d| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$$

D'où l'égalité cherchée :

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Remarque : si le point considéré (A ici) appartient au plan \mathcal{P} , ses coordonnées vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$ et le numérateur ci-dessus est nul. La distance cherchée est alors bien nulle.

4. Avec $A(-4; 6; -1)$ et $\mathcal{P} : x - 2y + 2z = 0$, il vient, en utilisant la formule précédente :

$$AH = \frac{|-4 - 2 \times 6 + 2 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-4 - 12 - 2|}{\sqrt{9}} = \frac{|-18|}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

La distance du point $A(-4; 6; -1)$ au plan $\mathcal{P} : x - 2y + 2z = 0$ est égale à 6.