
Produit scalaire et géométrie analytique du plan.

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 316 : N°22, 23, 24, 25, 27, 28, 33, 35,
36, 37

Page 317 : N°38, 39, 41, 42, 45, 48, 49, 52,
54, 55

N°22 page 316

On a la propriété, pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Comme on a ici : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$, il vient immédiatement :

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{2}}$$

Pour tout vecteur \vec{u} du plan, on a : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Comme on a ici $\|\vec{u}\| = 3$, il vient : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 3^2 = 9$.

$$\boxed{\vec{u}^2 = 9}$$

On a : $(2\vec{u}) \cdot (7\vec{v}) = (2 \times 7)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 14(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$, il vient : $(2\vec{u}) \cdot (7\vec{v}) = 14(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 14 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -7$.

$$\boxed{(2\vec{u}) \cdot (7\vec{v}) = -7}$$

On a : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 3^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 9 - 1 + \frac{1}{16} = \frac{129}{16}$.

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v})^2 = \frac{129}{16}}$$

De façon analogue :

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 3^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 9 + 1 + \frac{1}{16} = \frac{161}{16}$$

$$\boxed{(\vec{u} - \vec{v})^2 = \frac{161}{16}}$$

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan, on a : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

$$\text{D'où : } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 3^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 9 - \frac{1}{16} = \frac{143}{16}.$$

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \frac{143}{16}}$$

N°23 page 316

- a) On a : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$. Comme on a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, il vient $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$.
On en déduit :

Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.

- b) On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\text{On a ici : } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|, \vec{u} \cdot \vec{v} = -8 \text{ et } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

D'où, en tenant compte du fait qu'une norme est un nombre positif :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow -8 = \|\vec{u}\|^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 16 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 4.$$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = 4}$$

N°24 page 316

- a) On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Le triangle ABC étant équilatéral, on a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{3}$ et $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}$. Par

ailleurs : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = AB = AC = 5$.

Il vient donc : $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$.

$$\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{25}{2}}$$

b) Pour calculer $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$, on peut facilement tirer parti du calcul précédent :

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot (\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{AB} \cdot \overline{BA} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -5^2 + \frac{25}{2} = -25 + \frac{25}{2} = -\frac{25}{2}$$

$$\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\frac{25}{2}}$$

Remarque : on aurait également pu écrire : $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos(\overline{AB}, \overline{BC})$.

Or : $(\overline{AB}, \overline{BC}) = (\overline{AB}, \overline{BA}) + (\overline{BA}, \overline{BC}) = \pm\pi \pm \frac{\pi}{3}$. D'où : $\cos(\overline{AB}, \overline{BC}) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Comme $\|\overline{AB}\| = \|\overline{BC}\| = 5$, on retrouve le résultat ci-dessus.

c) On a : $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = \|\overline{OB}\| \times \|\overline{OC}\| \times \cos(\overline{OB}, \overline{OC})$.

Comme O est le centre de gravité du triangle ABC, qui est équilatéral, on a :

$$\|\overline{OB}\| = \|\overline{OC}\| = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 5$$

Par ailleurs, le triangle ABC étant équilatéral, on a : $(\overline{OB}, \overline{OC}) = \pm \frac{2\pi}{3}$

D'où : $\cos(\overline{OB}, \overline{OC}) = -\frac{1}{2}$.

Finalement : $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = \|\overline{OB}\| \times \|\overline{OC}\| \times \cos(\overline{OB}, \overline{OC}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times 5\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{25}{6}$.

$$\boxed{\overline{OB} \cdot \overline{OC} = -\frac{25}{6}}$$

N°25 page 316

Pour simplifier les écritures qui suivent, nous notons : $AB = BC = CD = DA = a$.

On a d'abord : $\vec{DI} \cdot \vec{DB} = \|\vec{DI}\| \times \|\vec{DB}\| \times \cos(\vec{DI}, \vec{DB}) = DI \times DB \times \cos(\vec{DI}, \vec{DB})$.

La longueur d'un côté du carré $ABCD$ valant a , on a immédiatement : $DB = \sqrt{2}a$.

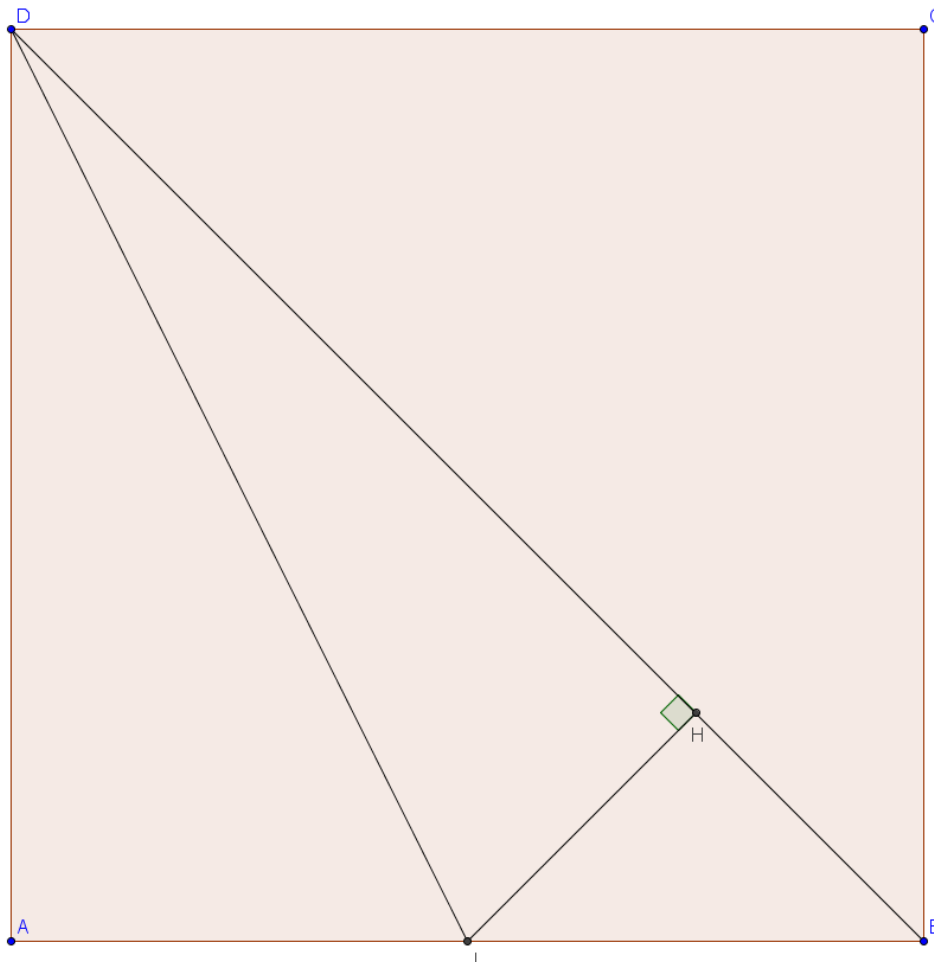
Puis, en considérant le triangle DAI rectangle en A , on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$DA^2 + AI^2 = DI^2. \text{ Soit, en tenant compte de : } DA = a \text{ et } AI = \frac{a}{2} : a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = DI^2.$$

$$\text{D'où : } DI^2 = \frac{5}{4}a^2 \text{ et, finalement : } DI = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Enfin, on a : $\widehat{IDB} = \pm(\vec{DI}, \vec{DB})$ et $\cos \widehat{IDB} = \cos(\vec{DI}, \vec{DB})$.

$$\text{On a donc : } \vec{DI} \cdot \vec{DB} = DI \times DB \times \cos(\vec{DI}, \vec{DB}) = \frac{\sqrt{5}}{2}a \times \sqrt{2}a \times \cos \widehat{IDB} = \frac{\sqrt{10}}{2}a^2 \cos \widehat{IDB}$$



On peut également revenir à la définition du produit scalaire et considérer le projeté orthogonal du point I sur la droite (DB) (cf. la figure page précédente).

Dans ces conditions, on a : $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DB} = DH \times DB$.

En remarquant que le triangle AHB est rectangle et isocèle en H (considérer ses angles), on a :

$$BH = \frac{BI}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Alors : } DH = DB - BH = \sqrt{2}a - \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{4a - a}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}a.$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DB} = DH \times DB = \frac{3}{2\sqrt{2}}a \times \frac{3}{2\sqrt{2}}a = \frac{3}{2}a^2.$$

Les deux expressions obtenues du produit scalaire $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DB}$ nous donnent l'égalité :

$$\frac{\sqrt{10}}{2}a^2 \cos \widehat{IDB} = \frac{3}{2}a^2$$

Soit : $\cos \widehat{IDB} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. On en tire alors, à la calculatrice :

$\widehat{IDB} \approx 18,4^\circ$ au dixième de degré près.
--

N°27 page 316

ABC triangle.

H est l'orthocentre de ABC .

O est le centre du cercle circonscrit à ABC .

$$\vec{u} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

a) Dans l'égalité précédente, nous pouvons appliquer directement l'égalité de Chasles de trois façons :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

Considérons par exemple : $\vec{u} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Par définition de l'orthocentre, la droite (HA) est perpendiculaire à la droite (BC) .

On a donc : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

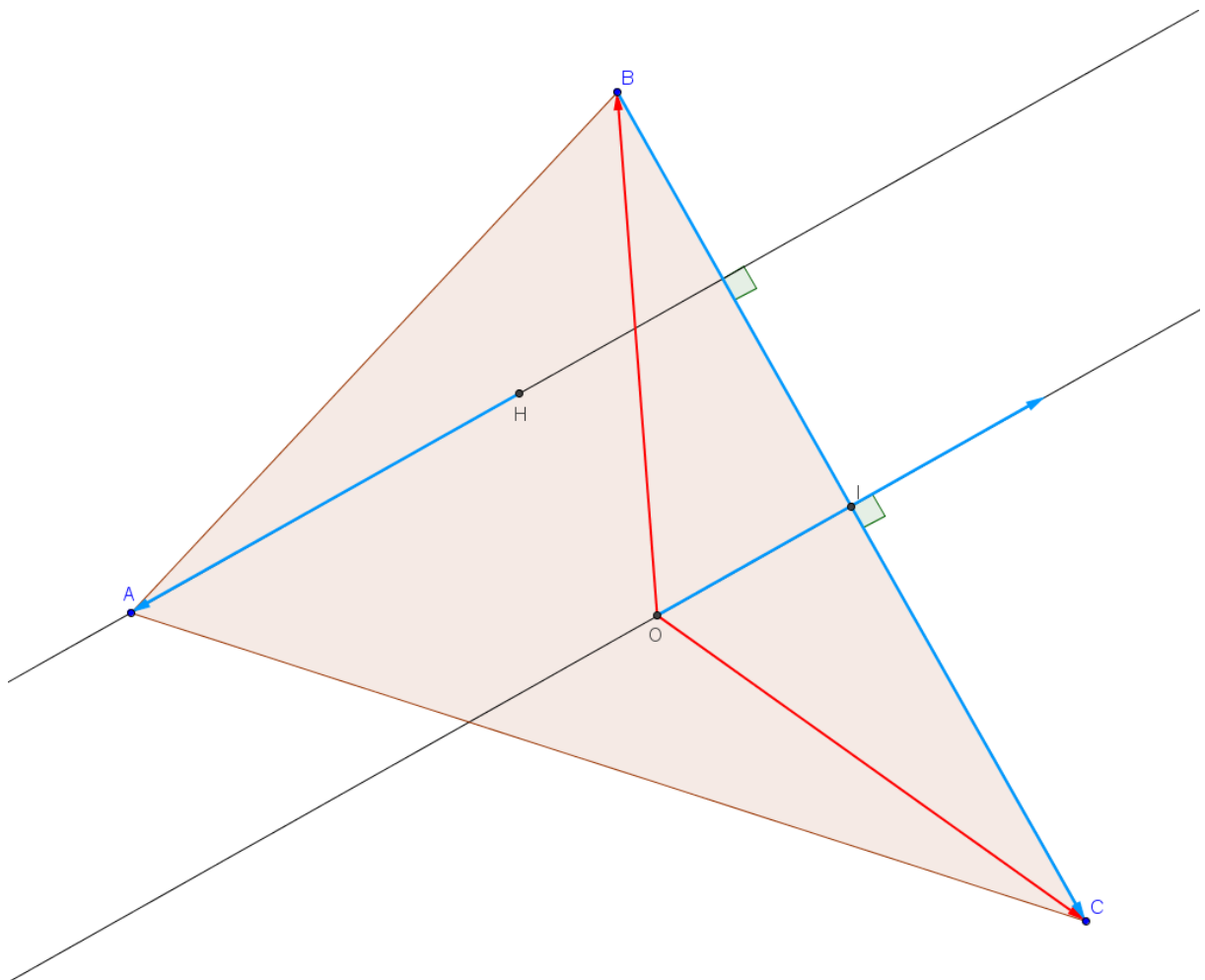
Par ailleurs, si on note I le milieu du segment $[BC]$, on a : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$.

Comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , la droite (OI) est la médiatrice du segment $[BC]$ et on a : $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

En définitive :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 0 + (2\overrightarrow{OI}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La figure ci-dessous illustre l'argumentaire que nous venons de développer.



En raisonnant de façon analogue, on montre que l'on a : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Remarque : à partir du moment où on a établi $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, il vient :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC}$$

- b) L'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nous conduit à distinguer à priori deux situations : soit le vecteur \vec{u} est nul, soit il n'est pas nul.

Montrons par l'absurde qu'il ne peut pas être non nul.

Supposons : $\vec{u} \neq \vec{0}$. Comme les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AC} sont non nuls, l'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ entraîne que les droites (AB) , (BC) et (AC) sont parallèles, c'est-à-dire que les points A , B et C sont alignés. Situation absurde puisque, dans ce cas, on ne peut définir l'orthocentre et le centre circonscrit du triangle.

On a bien : $\vec{u} = \vec{0}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. D'où, finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}$$

N°28 page 316

- a) On fait apparaître le point I dans le produit scalaire considéré :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IQ}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}) + \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ}$$

Comme le point I est le milieu du segment $[PQ]$, on a : $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \vec{0}$. Il vient alors :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IP}^2 = MI^2 - IP^2$$

$$\boxed{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = MI^2 - IP^2}$$

- b) Le triangle OPQ est isocèle en O (P et Q étant deux points du cercle, on a : $OP = OQ = R$). Le point I étant le milieu du segment $[PQ]$, la droite (OI) est la médiatrice de ce segment.

Dans le triangle OIM rectangle en I , le théorème de Pythagore donne : $OM^2 = OI^2 + IM^2$.

Dans le triangle OIP rectangle en I , on a par ailleurs : $R^2 = OP^2 = OI^2 + IP^2$.

On en déduit :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = MI^2 - IP^2 = (OM^2 - OI^2) - (R^2 - OI^2) = OM^2 - R^2$$

$$\boxed{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2}$$

Le résultat est ainsi établi.

N°33 page 316

a) Appelons I le milieu du segment $[BC]$. D'après le théorème de la médiane, on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\text{Soit : } AI^2 = \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \right).$$

Avec les données numériques fournies, il vient :

$$AI^2 = \frac{1}{2} \left(5^2 + 8^2 - \frac{7^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(25 + 64 - \frac{49}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{178 - 49}{2} = \frac{129}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{AI = \frac{\sqrt{129}}{2}}$$

b) On a : $CA^2 - CB^2 = 8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$.

Le point C appartient à l'ensemble \mathcal{E} des points du plan qui vérifient $MA^2 - MB^2 = 15$.

c) On a :

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 = 15 &\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = CA^2 - CB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow \\ (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) &= (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) &= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CB}) = 0 \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{MC}) &= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait obtenir ce résultat plus rapidement à l'aide du théorème de la médiane. En effet, en introduisant le point I , milieu du segment $[AB]$, on a, pour tout point M du plan :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$$

En particulier : $CA^2 - CB^2 = 2\overline{IC} \cdot \overline{AB} = 15$.

On a donc :

$$MA^2 - MB^2 = 15 \Leftrightarrow 2\overline{IM} \cdot \overline{AB} = 2\overline{IC} \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot (\overline{IM} - \overline{IC}) = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CM} = 0$$

La relation $\overline{AB} \cdot \overline{CM} = 0$ définit la droite passant par C et admettant \overline{AB} comme vecteur normal. Il s'agit donc, dans le triangle ABC , de la hauteur issue de C .

L'ensemble \mathcal{E} est la hauteur issue de C du triangle ABC .

N°35 page 316

a) Comme $\overline{AP} = k\overline{AB}$ et $AB = a$, il vient : $AP^2 = \overline{AP}^2 = (k\overline{AB})^2 = k^2\overline{AB}^2 = k^2AB^2 = k^2a^2$.

$$\boxed{AP^2 = k^2a^2}$$

On a : $\overline{AR} = \overline{AC} + \overline{CR}$ et $\overline{CR} = k\overline{CA}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} AR^2 &= \overline{AR}^2 = (\overline{AC} + \overline{CR})^2 = (\overline{AC} + k\overline{CA})^2 \\ &= (\overline{AC} - k\overline{AC})^2 = [(1-k)\overline{AC}]^2 \\ &= (1-k)^2 \overline{AC}^2 = (1-k)^2 AC^2 \\ &= (1-k)^2 a^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{AR^2 = (1-k)^2 a^2}$$

On a : $\overline{AP} \cdot \overline{AR} = AP \times AR \times \cos(\overline{AP}, \overline{AR})$.

D'après les calculs précédents, on a : $AP = \sqrt{k^2a^2} = |k|a$ et $AR = \sqrt{(1-k)^2 a^2} = |1-k|a$.

Il vient donc : $AP \times AR = |k(1-k)|a^2$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}) &= (k\overrightarrow{AB}, (1-k)\overrightarrow{AC}) \\ &= (k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}) + (k\overrightarrow{AC}, (1-k)\overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (k\overrightarrow{AC}, (1-k)\overrightarrow{AC}) \\ &= \pm \frac{\pi}{3} + (k\overrightarrow{AC}, (1-k)\overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

L'angle $(k\overrightarrow{AC}, (1-k)\overrightarrow{AC})$ peut être nul ou égal à π (modulo 2π).

Si k et $1-k$ sont de même signe, on a : $AP \times AR = k(1-k)a^2$ et

$$(k\overrightarrow{AC}, (1-k)\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = 0(2\pi), \text{ d'où } \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = AP \times AR \times \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{2}k(1-k)a^2.$$

Si k et $1-k$ ne sont pas de même signe, on a : $AP \times AR = -k(1-k)a^2$ et

$$(k\overrightarrow{AC}, (1-k)\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = \pi(2\pi), \text{ d'où } \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = AP \times AR \times \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{2}k(1-k)a^2.$$

Quand $k=0$ ou $k=1$ on a respectivement : A et P confondus et R et A confondus.

Dans chaque cas, le produit scalaire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}$ est nul.

Dans tous les cas :

$$\boxed{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = AP \times AR \times \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{2}k(1-k)a^2}$$

$$\text{Enfin : } PR^2 = \overrightarrow{PR}^2 = (\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP})^2 = \overrightarrow{AR}^2 - 2\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}^2.$$

En utilisant les résultats obtenus précédemment, on a alors :

$$\begin{aligned}PR^2 &= \overrightarrow{AR}^2 - 2\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}^2 = (1-k)^2 a^2 - 2 \times \frac{1}{2}k(1-k)a^2 + k^2 a^2 \\ &= (1 - 2k + k^2 - k + k^2 + k^2) a^2 \\ &= (3k^2 - 3k + 1) a^2\end{aligned}$$

$$\boxed{PR^2 = (3k^2 - 3k + 1) a^2}$$

- b) On vérifie rapidement que l'on a : $3k^2 - 3k + 1 > 0$ pour tout réel k .
Il vient alors :

$$PR = \sqrt{3k^2 - 3k + 1} \times a$$

En procédant de façon analogue à ce qui a été fait à la question précédente, on obtient finalement :

$$PR = QR = RQ = \sqrt{3k^2 - 3k + 1} \times a$$

Le triangle PQR est un triangle équilatéral dont la longueur des côtés vaut :

$$\sqrt{3k^2 - 3k + 1} \times a$$

N°36 page 316

La forme des membres de l'égalité proposée « suggère » de s'intéresser au théorème de la médiane (à l'une de ses formes tout au moins !).

En introduisant le point I , milieu du segment $[BC]$, on a :

- Dans le triangle ABC : $AB^2 - AC^2 = 2\vec{IA} \cdot \vec{BC}$;
- Dans le triangle HBC : $HB^2 - HC^2 = 2\vec{IH} \cdot \vec{BC}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} AB^2 - AC^2 - (HB^2 - HC^2) &= 2\vec{IA} \cdot \vec{BC} - 2\vec{IH} \cdot \vec{BC} \\ &= 2\vec{BC} \cdot (\vec{IA} - \vec{IH}) \\ &= 2\vec{BC} \cdot \vec{HA} \end{aligned}$$

La droite (HA) étant la hauteur du triangle ABC issue du sommet A , elle est perpendiculaire à la droite (BC) et on a donc : $\vec{BC} \cdot \vec{HA} = 0$.

Finalement : $AB^2 - AC^2 - (HB^2 - HC^2) = 0$, soit :

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$$

Le résultat est ainsi établi.

N°37 page 316

Un exercice où la relation de Chasles va s'avérer déterminante ...

On a :

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{DB} + (\overline{AB} + \overline{BD}) \cdot \overline{BC} \\ &= \overline{AB} \cdot (\overline{CD} + \overline{DB} + \overline{BC}) + \overline{BC} \cdot \overline{DB} + \overline{BD} \cdot \overline{BC} \\ &= \overline{AB} \cdot \underbrace{(\overline{CD} + \overline{DB} + \overline{BC})}_{=\overline{CC}=\vec{0}} + \overline{BC} \cdot \overline{DB} + \overline{BD} \cdot \overline{BC} \\ &= \overline{BC} \cdot (\overline{DB} + \overline{BD}) \\ &= \overline{BC} \cdot \underbrace{(\overline{DB} + \overline{BD})}_{=\overline{DD}=\vec{0}} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

N°38 page 317

a) Comme la somme des mesures des angles géométriques d'un triangle vaut 180° et comme $\hat{B} = 55^\circ$ et $\hat{C} = 73^\circ$, on a :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (55^\circ + 73^\circ) = 52^\circ$$

$$\boxed{\hat{A} = 52^\circ}$$

b) En utilisant : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$, il vient :

$$b = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} \times a = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 52^\circ} \times 4 \approx 4,2$$

Et :

$$c = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} \times a = \frac{\sin 73^\circ}{\sin 52^\circ} \times 4 \approx 4,9$$

$$\boxed{b = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 52^\circ} \times 4 \approx 4,2 \text{ et } c = \frac{\sin 73^\circ}{\sin 52^\circ} \times 4 \approx 4,9}$$

N°39 page 317

a) Si on note S l'aire du triangle ABC , on a :

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin 45^\circ = \frac{35}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{35\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{S = \frac{35\sqrt{2}}{4}}$$

b) Comme $a = b = 1$, le triangle ABC est isocèle en C .

On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

Le triangle ABC étant isocèle en C , H est le milieu du segment $[AB]$.

$$\text{On a alors : } S = \frac{1}{2} CH \times AB = \frac{1}{2} CH \times c = \frac{\sqrt{3}}{2} CH .$$

Dans le triangle ACH rectangle en H , on a : $AC^2 = AH^2 + HC^2$, soit : $b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + HC^2$.

$$\text{C'est-à-dire : } HC^2 = b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} . \text{ D'où : } HC = \frac{1}{2} .$$

Finalement :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{S = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Remarque : on pouvait également remarquer, toujours en travaillant dans le triangle ACH ,

$$\text{que l'on avait : } \sin \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \text{ Soit : } \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ et, enfin : } \hat{C} = \frac{\pi}{3} .$$

$$\text{On obtenait alors : } S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} .$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment.

N°41 page 317

a) Soit I le milieu du segment $[AB]$. Les coordonnées de I sont :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(3+0) = \frac{3}{2} \text{ et } y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(-2+(-1)) = -\frac{3}{2}$$

On a par ailleurs : $\overrightarrow{AB}(0-3; -1-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(-3;1)$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ est-il un vecteur normal de la médiatrice du segment $[AB]$.

En tenant compte du fait que cette droite passe par I , une de ses équations est donc :

$$-3x + y = -3x_I + y_I$$

$$\text{Soit : } -3x + y = -3 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -6.$$

Une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ est : $-3x + y + 6 = 0$.

- b) La hauteur issue de C dans le triangle ABC est perpendiculaire à la droite (AB) et est donc parallèle à la médiatrice du segment $[AB]$. En tenant compte du fait que C lui appartient, une de ses équations est donc :

$$-3x + y = -3x_C + y_C$$

$$\text{Soit : } -3x + y = -3 \times 1 + 3 = 0.$$

Une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC est : $-3x + y = 0$.

N°42 page 317

Pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC , nous pouvons déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux de ses hauteurs.

La hauteur (D_A) issue de A admet comme vecteur normal le vecteur \overrightarrow{BC} .

On a facilement : $\overrightarrow{BC}(-6; -2)$.

Une équation de (D_A) s'écrit alors : $-6x - 2y = -6x_A - 2y_A$, soit : $-6x - 2y = -2$.

En simplifiant par -2 , il vient : $3x + y = 1$.

On procède de façon analogue avec la hauteur (D_B) issue de B : elle admet comme vecteur normal le vecteur \overrightarrow{AC} . On a : $\overrightarrow{AC}(-3; 3)$.

Une équation de (D_B) s'écrit alors : $-3x + 3y = -3x_B + 3y_B$, soit : $-3x + 3y = -3$.

En simplifiant par -3 , il vient : $x - y = 1$.

Il convient donc maintenant de résoudre le système :

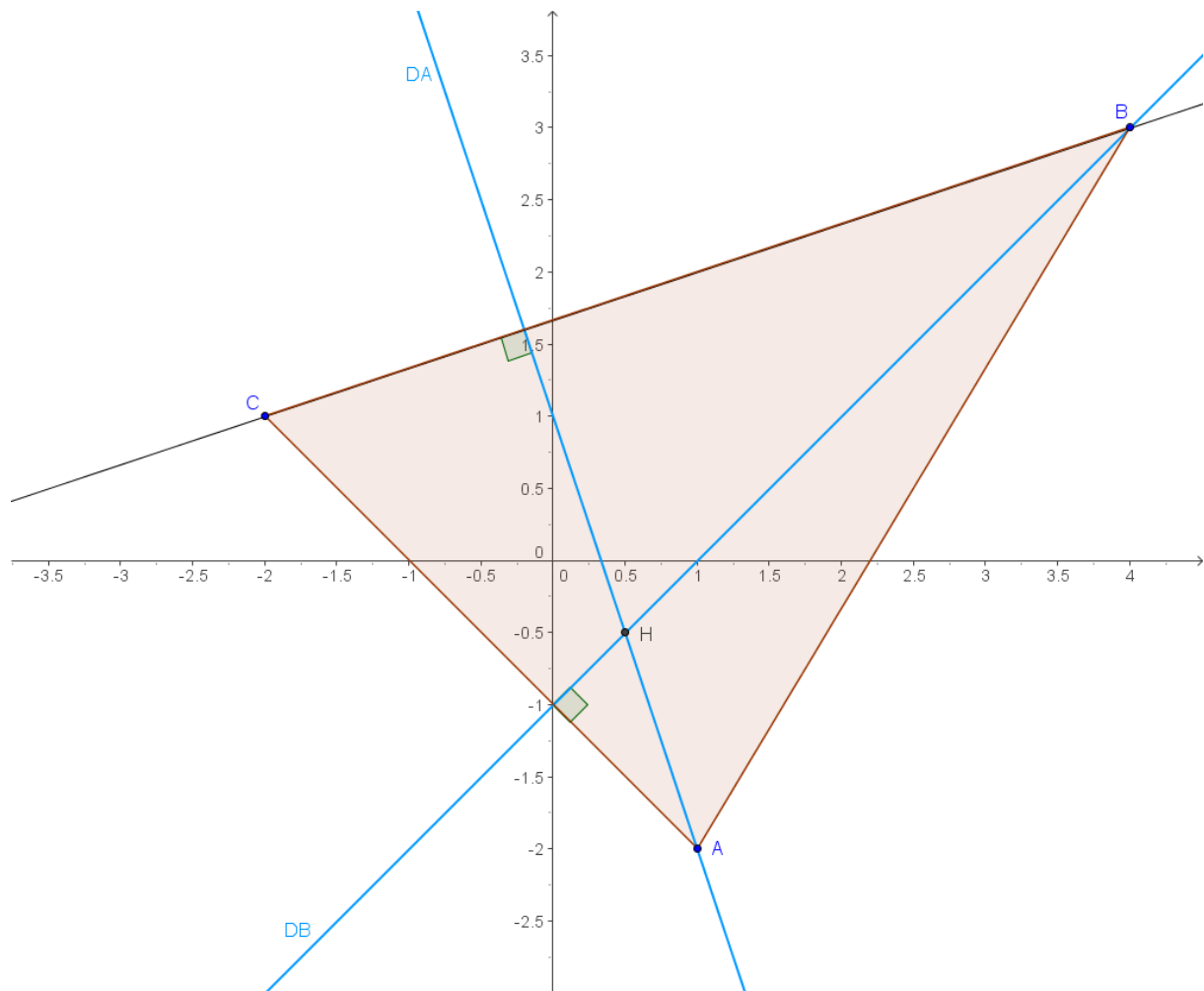
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, il vient : $4x = 2$, soit $x = \frac{1}{2}$. La deuxième équation donne

$$\text{alors : } y = x - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Le point H admet pour coordonnées $x = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$.

La figure ci-dessous illustre les objets géométriques utilisés dans notre démarche.



N°45 page 317

- a) Comme l'équation fournie se réécrit : $2x - y - 3 = 0$, on a immédiatement $\vec{n}(2; -1)$ comme vecteur normal à la droite d .
- b) Soit x l'abscisse du point H .
Comme il appartient à la droite d , on peut écrire : $H(x; 2x - 3)$.

Par ailleurs, la droite (AH) est, par définition du point H , perpendiculaire à la droite d .

Les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{AH} sont donc colinéaires.

Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}$.

Comme $\overrightarrow{AH}(x - (-1); 2x - 3 - 4)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AH}(x + 1; 2x - 7)$, on a :

$$\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2\lambda \\ 2x - 7 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\lambda = -1 \\ 2x + \lambda = 7 \end{cases}$$

Seule l'inconnue x nous intéresse. En ajoutant à la première égalité deux fois la seconde, on obtient : $x + 4x = -1 + 14$. Soit : $5x = 13$.

Finalement : $x = \frac{13}{5}$.

On a alors : $y = 2x - 3 = 2 \times \frac{13}{5} - 3 = \frac{26 - 15}{5} = \frac{11}{5}$.

$$\boxed{H\left(\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)}$$

c) Le repère étant orthonormal, nous pouvons calculer la distance AH de deux façons.

En utilisant les coordonnées des points A et H , il vient :

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{5} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{11}{5} - 4\right)^2} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{18^2 + (-9)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{18^2 + 9^2} = \frac{9}{5} \sqrt{2^2 + 1} \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

On peut également utiliser la formule donnant la distance d'un point à une droite puisque la distance AH n'est rien d'autre que la distance du point A à la droite d .

$$AH = \frac{|2x_A - y_A - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 \times (-1) - 4 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|-9|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

On retrouve le résultat obtenu précédemment.

$$\boxed{AH = \frac{9\sqrt{5}}{5}}$$

N°48 page 317

a) Pour tout point M du plan, on a :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow IM^2 = \sqrt{2}^2 = 2 \Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 2 \text{ est une équation du cercle } \mathcal{C}_1.$$

b) Pour tout point M du plan, on a cette fois :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x - (-2)) \times (x - 4) + (y - 1) \times (y - 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2) \times (x - 4) + y(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 8 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 9 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{37}{4}$$

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} \text{ est une équation du cercle } \mathcal{C}_2.$$

N°49 page 317

a) On a :

$$x^2 + y^2 - x + \frac{7}{2}y - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + \frac{7}{2}y - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + \left[\left(y + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} + \frac{49}{16} \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{153}{16} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{153}}{4}\right)^2$$

L'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{153}}{4}\right)^2$ nous permet immédiatement de conclure :

Le cercle \mathcal{C} est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{153}}{4}$.

- b) On procède comme précédemment mais en commençant par simplifier les coefficients pour obtenir des coefficients de x^2 et y^2 égaux à 1 :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x + 2y^2 - 12y = -10 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 6y = -5 \Leftrightarrow \\ \left[(x+1)^2 - 1 \right] + \left[(y-3)^2 - 9 \right] = -5 &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5 \Leftrightarrow \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 &= \sqrt{5}^2 \end{aligned}$$

L'équation $(x+1)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{5}^2$ nous permet de conclure :

Le cercle \mathcal{C} est le cercle de centre $\Omega(-1;3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

N°52 page 317

Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \frac{29}{4}$ admet pour centre l'origine du repère et pour rayon $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Pour démontrer que la droite d'équation $4x + 10y = 29$ lui est tangente, il suffit de démontrer que la distance d du point O à cette droite est égale au rayon du cercle.

Or, d'après l'équation de la droite fournie, il vient immédiatement :

$$d = \frac{|4 \times 0 + 10 \times 0 - 29|}{\sqrt{4^2 + 10^2}} = \frac{29}{2\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{29}{2\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

La droite d'équation $4x + 10y = 29$ est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = \frac{29}{4}$.

Notons H le point de tangence.

La droite (OH) est perpendiculaire à la droite d'équation $4x + 10y = 29$. Le vecteur \overrightarrow{OH} est donc colinéaire à tout vecteur normal de cette droite. Le vecteur $\vec{u}(4;10)$ est l'un d'eux. Le vecteur $\vec{n}(2;5)$ également. Il existe un réel λ tels que : $\overrightarrow{OH} = \lambda \vec{n}$.

H appartenant à la droite d'équation $4x + 10y = 29$, ses coordonnées sont de la forme

$$\left(x; \frac{29-4x}{10} \right). \text{ L'égalité } \overrightarrow{OH} = \lambda \vec{n} \text{ équivaut alors à : } \begin{cases} x = 2\lambda \\ \frac{29-4x}{10} = 5\lambda \end{cases}$$

On en tire alors : $\frac{x}{2} = \frac{29-4x}{50}$. D'où : $50x = 58 - 8x$. Soit, finalement : $x = 1$.

Il vient alors : $y = \frac{29-4x}{10} = \frac{29-4}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$.

On a donc : $H\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

En notant H le point de tangence du cercle d'équation $x^2 + y^2 = \frac{29}{4}$ et de la droite d'équation

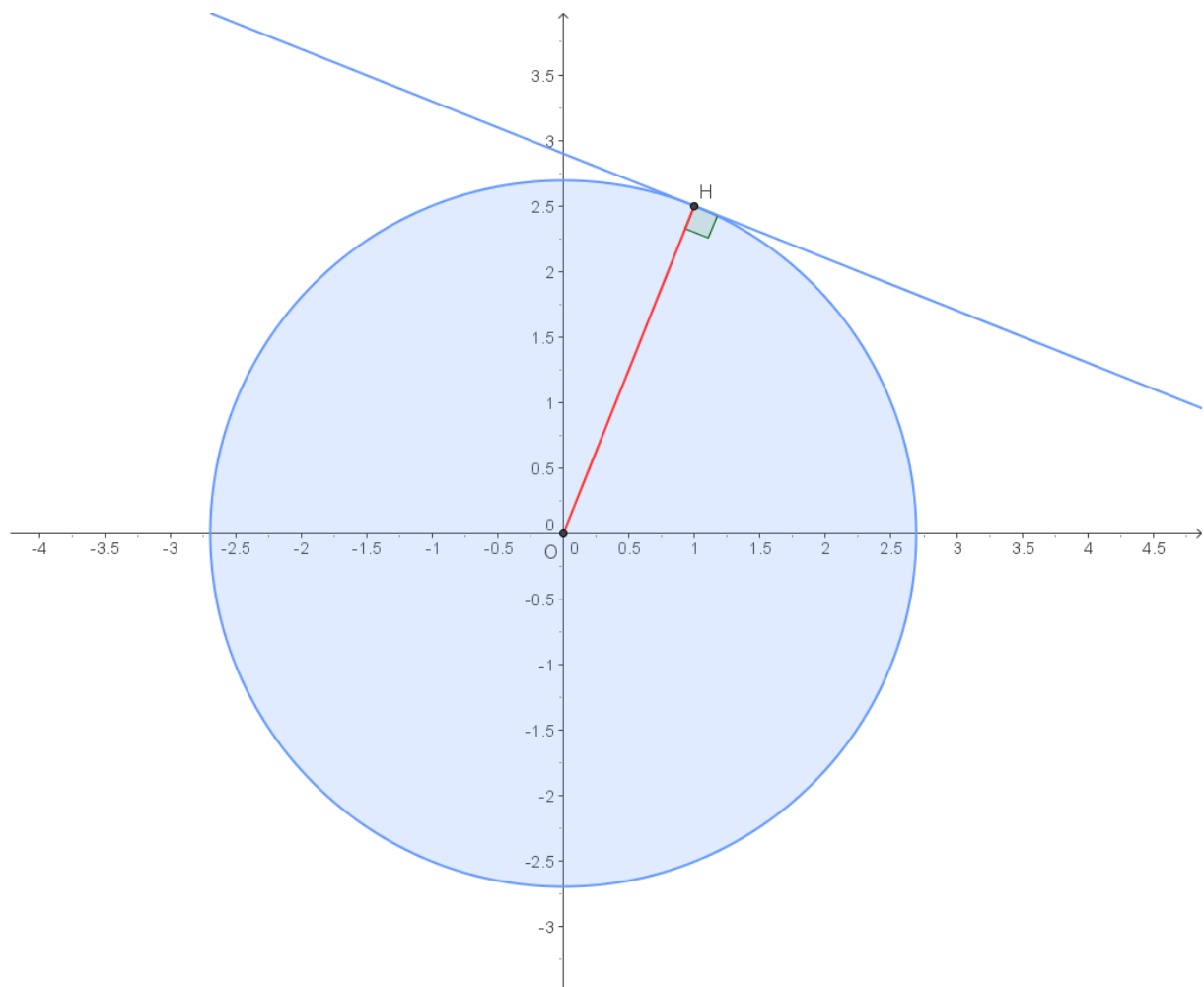
$$4x + 10y = 29, \text{ on a : } H\left(1; \frac{5}{2}\right).$$

Remarque : puisque H appartient au cercle et à la droite, ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 4x + 10y = 29 \\ x^2 + y^2 = \frac{29}{4} \end{cases}$$

En le résolvant, vous retrouverez les coordonnées obtenues ci-dessus. A vous alors de comparer les deux approches ...

Pour finir, une petite figure illustrant la situation de l'exercice :



N°54 page 317

Cherchant à obtenir un produit scalaire nul ne faisant intervenir que deux vecteurs, nous introduisons le milieu du segment $[AB]$ que nous nommons I .

On a alors : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

On peut alors conclure :

L'ensemble des points du plan qui vérifient l'égalité $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ est le cercle de diamètre $[AI]$ où I est milieu du segment $[AB]$.

N°55 page 317

En guise de préambule, soulignons que la donnée $AB = 2$ entraîne que les points A et B sont distincts.

a) On a d'abord l'équivalence : $\frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA - 3MB = 0$

En effet, si $\frac{MA}{MB} = 3$, on a $MB \neq 0$ et il vient alors $MA = 3MB$.

Réciproquement, si $MA - 3MB = 0$, alors $MB \neq 0$ sans quoi, on aurait $MB = MA = 0$ ce qui est absurde puisque A et B sont distincts.

Ensuite, les distance MA et MB ne pouvant être simultanément nulles, le réel $MA + 3MB$ est strictement positif. On a donc :

$$\frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA - 3MB = 0 \Leftrightarrow (MA - 3MB) \times (MA + 3MB) = 0 \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$$

L'ensemble \mathcal{E} est l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
 $MA^2 - 9MB^2 = 0$

b) On a : $MA^2 - 9MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$.

Comme le point G étant le barycentre de $(A;1)$ et $(B;3)$, on a, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$. De même, comme K est le barycentre de $(A;1)$ et $(B;-3)$, on a, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MK}$.

Il vient alors :

$$MA^2 - 9MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overline{MA} - 3\overline{MB}) \cdot (\overline{MA} + 3\overline{MB}) = 0 \Leftrightarrow 4\overline{MG} \cdot (-2\overline{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MG} \cdot \overline{MK} = 0$$

L'ensemble \mathcal{E} est l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
 $\overline{MG} \cdot \overline{MK} = 0$

c) D'après ce qui précède, l'ensemble \mathcal{E} est le cercle de diamètre $[GK]$.

Notons I son centre.

Le point I est le milieu du segment $[GK]$, c'est donc l'isobarycentre des points G et K .

Nous pouvons écrire : $\frac{I}{2} = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} G & K \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right)$.

Les points G et K sont eux-mêmes définis comme des barycentres :

$$\frac{G}{4} = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 3 \end{array} \right) \text{ équivaut à } \frac{G}{1} = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

$$\frac{K}{-2} = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -3 \end{array} \right) \text{ équivaut à } \frac{K}{1} = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

On a alors :

$$\frac{I}{2} = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & B & A & B \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{array} \right)$$

On en conclut finalement que le point I est le barycentre de $(A; -1)$ et $(B; 9)$.

Déterminons maintenant le rayon de \mathcal{E} .

On a : $\overline{GA} + 3\overline{GB} = \vec{0}$. D'où : $4\overline{AG} = 3\overline{AB}$, soit : $\overline{AG} = \frac{3}{4}\overline{AB}$.

De façon analogue, à partir de $\overline{KA} - 3\overline{KB} = \vec{0}$, il vient : $2\overline{AK} = 3\overline{AB}$. Soit : $\overline{AK} = \frac{3}{2}\overline{AB}$.

De ces deux relations, on tire :

$$\overline{GK} = \overline{AK} - \overline{AG} = \frac{3}{2}\overline{AB} - \frac{3}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AB}$$

$$\text{D'où : } GK = \frac{3}{4} AB = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}.$$

Le diamètre de \mathcal{C} vaut donc $\frac{3}{2}$, son rayon vaut donc : $\frac{3}{4}$.

Finalement :

Le cercle \mathcal{C} est le cercle de centre I , barycentre de $(A; -1)$ et $(B; 9)$, et de rayon $\frac{3}{4}$.