
Produit scalaire et géométrie analytique de l'espace.

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 319 : N°76, 77, 81

Page 325 : N°117

Page 320 : N°85, 86, 88, 95, 97, 99

Page 327 : N°131

Page 324 : N°110, 113, 114, 115

N°76 page 319

On a facilement : $\overrightarrow{AB}(2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}(3;3;0)$ et $\overrightarrow{BC}(1;2;2)$.

Le repère considéré étant orthonormal, on en tire immédiatement :

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = AC^2 = 3^2 + 3^2 + 0^2 = 18$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = BC^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

On a donc : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et la réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en B .

On a par ailleurs : $AB^2 = BC^2$. Puisque nous manipulons des longueurs, cette égalité équivaut à $AB = BC$. Nous pouvons alors conclure que le triangle ABC est isocèle en B .

Finalement :

Le triangle ABC est isocèle et rectangle en B .

Remarque : on pouvait également calculer les produits scalaires et constater que l'on avait $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 + 2 - 4 = 0$. On concluait alors que le triangle était rectangle en B . Le calcul des longueurs ci-dessus permet également de conclure que le triangle est isocèle en ce point sans calculs additionnels.

N°77 page 319

- a) Pour démontrer que la droite (AF) est perpendiculaire au plan (BCD) , il suffit de démontrer que le vecteur \overrightarrow{AF} (vecteur directeur de la droite (AF)) est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) .

On peut, par exemple, considérer les vecteurs \overrightarrow{CB} et \overrightarrow{CD} .

$$\text{On a alors : } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}) \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Or, les triangles ABC et BCF sont des triangles équilatéraux. Comme ils ont une arête commune, tous leurs côtés sont de même longueur (plus généralement, toutes les arêtes d'un octaèdre régulier sont de même longueur). Nous notons a cette longueur.

$$\text{On a alors les résultats classiques : } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} a^2.$$

$$\text{On en déduit alors : } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = 0.$$

$$\text{De façon analogue, on a : } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

En raisonnant cette fois avec les triangles équilatéraux ACD et ACF , on trouve encore :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = 0$$

Comme $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, on en déduit finalement :

La droite (AF) est perpendiculaire au plan (BCD) .

- b) Pour démontrer que les plans (ABF) et (AFC) sont perpendiculaires, il suffit de montrer que deux vecteurs normaux à ces plans, respectivement, sont orthogonaux.

En guise de préambule, nous allons nous intéresser au quadrilatère $BCDE$.

Puisque ses côtés sont tous de même longueur, nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un losange et introduire le point I , milieu commun des segments $[BD]$ et $[CE]$.

On démontre facilement en tenant compte du fait que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) (considérer les triangles BAD et CAE , isocèles en A) que l'on a :

$IB = IC = ID = IE$. Le quadrilatère $BCDE$ est en fait un carré.

En considérant les triangles BDF et ECF , isocèles en F , on montre que I est également le projeté orthogonal de F sur le plan (BCD) .

Par ailleurs, on a facilement $IA = IF$.
Le point I est le milieu du segment $[AF]$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\overline{BA} + \overline{BF} &= \overline{BI} + \overline{IA} + \overline{BI} + \overline{IF} = 2\overline{BI} = \overline{BD} \\ \overline{CA} + \overline{CF} &= \overline{CI} + \overline{IA} + \overline{CI} + \overline{IF} = 2\overline{CI} = \overline{CE}\end{aligned}$$

On en tire que les points D et E appartiennent aux plans (ABF) et (AFC) respectivement.

Les éléments précédents vont nous être utiles pour la suite.

Dans un premier temps, nous allons montrer que le vecteur \overline{EC} est un vecteur normal au plan (ABF) .

A la question précédente, nous avons établi que la droite (AF) était perpendiculaire au plan (BCD) . Or, E et C sont des points de ce plan. On en tire que les vecteurs \overline{EC} et \overline{AF} sont orthogonaux.

Par ailleurs, $BCDE$ étant un carré, les vecteurs \overline{EC} et \overline{BD} sont orthogonaux.

Le vecteur \overline{EC} étant un vecteur orthogonal à deux vecteurs $(\overline{AF}$ et $\overline{BD})$ non colinéaires du plan (BCD) , on en déduit finalement qu'il s'agit d'un vecteur normal à ce plan.

On démontre de façon analogue que le vecteur \overline{BD} est un vecteur normal au plan (AFC) .

Or, $BCDE$ étant un carré, les vecteurs \overline{EC} et \overline{BD} sont orthogonaux. On en déduit finalement :

Les plans (ABF) et (AFC) sont perpendiculaires.

N°81 page 319

Puisque G est l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$, on a, pour tout point M de l'espace :

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MG}$$

On a également, pour tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) &= 0 \Leftrightarrow \\ (4\overrightarrow{MG}) \cdot (2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ}) &= 0 \Leftrightarrow \\ 8\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{JI} &= 0 \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{JI} &= 0 \end{aligned}$$

L'ensemble obtenu est donc le plan contenant G et de vecteur normal \overrightarrow{IJ} (ce n'est pas le vecteur nul sans quoi $ABCD$ ne serait pas un tétraèdre ...).

L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient l'égalité :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = 0$$

est le plan contenant G et de vecteur normal \overrightarrow{IJ} , les points I et J étant les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

N°85 page 320

- a) L'espace étant muni d'un repère orthonormal, on obtient directement les coordonnées d'un vecteur normal \vec{n} du plan \mathcal{P} grâce aux coefficients de x , y et z dans l'équation fournie :

$$\boxed{\vec{n}(3;1;0)}$$

- b) Une équation d'un plan \mathcal{O} parallèle à \mathcal{P} est de la forme : $3x + y + d = 0$, où d est une constante à déterminer.

Le point $A(1;5;3)$ étant un point de \mathcal{O} , ses coordonnées vérifient l'équation $3x + y + d = 0$. On a donc : $3 \times 1 + 5 + d = 0$, soit $d = -8$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Une équation du plan } \mathcal{O} \text{ parallèle à } \mathcal{P} \text{ et passant par } A(1;5;3) \text{ est : } 3x + y - 8 = 0.}$$

N°86 page 320

Le plan \mathcal{P} perpendiculaire à la droite (AB) au point A admet donc pour vecteur normal le vecteur \overline{AB} . On a facilement : $\overline{AB}(-2; 3; -1)$.

L'équation du plan \mathcal{P} est donc de la forme : $-2x + 3y - z + d = 0$ où d est une constante à déterminer.

Le point A appartenant au plan \mathcal{P} , ses coordonnées vérifient l'équation obtenue :

$$-2 \times 5 + 3 \times 2 - 0 + d = 0$$

Soit : $-4 + d = 0$. Finalement $d = 4$.

Conclusion :

Une équation du plan perpendiculaire à la droite (AB) et passant pas le point A s'écrit :

$$-2x + 3y - z + 4 = 0$$

N°88 page 320

a) Puisque l'espace est rapporté à un repère orthonormal, il vient :

- Le plan \mathcal{P} admet pour vecteur normal : $\vec{n}(1; 3; -1)$.
- Le plan \mathcal{Q} admet pour vecteur normal : $\vec{n}'(-1; 2; 5)$.

On a alors : $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times (-1) + 3 \times 2 + (-1) \times 5 = -1 + 6 - 5 = 0$.

Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont donc orthogonaux et on en conclut finalement :

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont perpendiculaires.

b) On procède comme précédemment : le plan \mathcal{P} admet ici pour vecteur normal :

$\vec{n}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1\right)$ et $\vec{n}'(-3; -1; -1)$.

Il vient alors : $\vec{n} \cdot \vec{n}' = \frac{1}{2} \times (-3) + \frac{1}{3} \times (-1) + 1 \times (-1) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - 1$. Sans même calculer ce produit scalaire, on constate qu'il est strictement négatif (somme de trois termes eux-mêmes strictement négatifs) et donc non nul.

Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' ne sont donc pas orthogonaux et on en conclut finalement :

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} ne sont pas perpendiculaires.

N°95 page 320

Ecrivons une équation cartésienne du plan \mathcal{P} sous la forme : $ax + by + cz + d = 0$ (les réels a , b et c n'étant pas nuls tous les trois).

A et B sont des points de \mathcal{P} . Leurs coordonnées vérifient donc l'équation ci-dessus et on en tire le système :

$$\begin{cases} a - b + 2c + d = 0 \\ a + 2c + d = 0 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient immédiatement : $b = 0$.

Le système est donc équivalent à l'équation : $a + 2c + d = 0$, soit : $d = -a - 2c$.
L'équation cherchée se réécrit donc :

$$ax + cz - a - 2c = 0$$

Dire que les plans \mathcal{P} et \mathcal{O} sont perpendiculaires équivaut à dire que tout vecteur normal de l'un est orthogonal à tout vecteur normal de l'autre.

Puisque l'espace est rapporté à un repère orthonormal et que l'on dispose d'une équation cartésienne du plan \mathcal{O} ($3x + 5y - 8z - 3 = 0$), on a immédiatement un vecteur normal, \vec{n}' , de ce plan : $\vec{n}'(3; 5; -8)$.

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} étant de la forme : $ax + cz - a - 2c = 0$, on en tire que le vecteur $\vec{n}(a; 0; c)$ est un vecteur normal de ce plan.

Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' étant orthogonaux, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow 3 \times a + 0 \times 5 - 8 \times c = 0 \Leftrightarrow 3a - 8c = 0$$

D'où : $c = \frac{3}{8}a$.

L'équation de \mathcal{P} se réécrit alors : $ax + \frac{3}{8}az - a - 2 \times \frac{3}{8}a = 0$, soit : $ax + \frac{3}{8}az - \frac{7}{4}a = 0$.

En choisissant $a = 8$, on obtient finalement : $8x + 3z - 14 = 0$.

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est : $8x + 3z - 14 = 0$.

N°97 page 320

a) On a :

$$\begin{aligned}M(x; y; z) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \\x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0 &\Leftrightarrow \\x^2 + y^2 + 6y + z^2 - 4z + 9 = 0 &\Leftrightarrow \\x^2 + [(y+3)^2 - 9] + [(z-2)^2 - 4] + 9 = 0 &\Leftrightarrow \\x^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 4 &\Leftrightarrow \Omega M^2 = 2^2\end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède :

La sphère \mathcal{S} est la sphère de centre $\Omega(0; -3; 2)$ et de rayon 2.

b) Le repère étant orthonormal, la distance $d(\Omega, \mathcal{P})$ du point Ω au plan \mathcal{P} est donnée par :

$$d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|0 - 2 \times (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

c) Le plan \mathcal{P} coupera la sphère \mathcal{S} si, et seulement si, la distance de Ω à \mathcal{P} est inférieure ou égale au rayon de la sphère, c'est-à-dire 2.

Comme $6 > 4$, on a immédiatement $\sqrt{6} > 2$. Par ailleurs, $\frac{4}{3} > 1$. Finalement : $\frac{4\sqrt{6}}{3} > 2$.

On en conclut :

Le plan \mathcal{P} ne coupe pas la sphère \mathcal{S} .

N°99 page 320

Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :

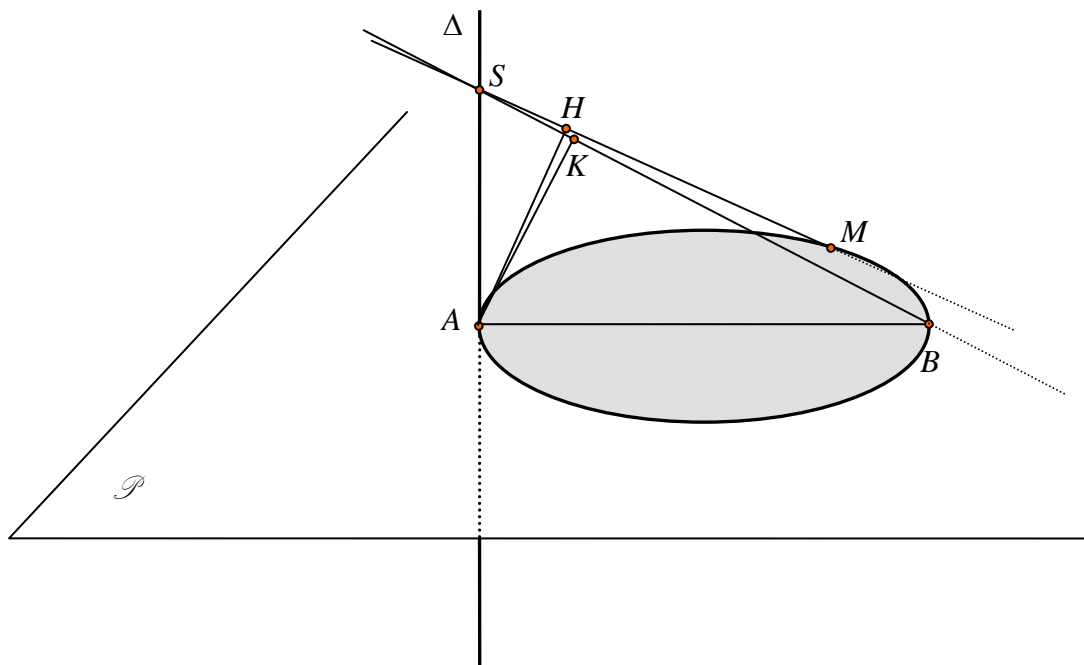
- L'abscisse x est comprise entre 0 et 1 ;
- L'ordonnée y est comprise entre 0 et 1 ;
- La cote z est comprise entre 0 et 1.

Le cube considéré est donc défini par le système :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

N°110 page 324

a)



b) On a : $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Comme le vecteur \overrightarrow{SA} est un vecteur directeur de la droite (AS) , qui est perpendiculaire au plan \mathcal{P} , il est orthogonal à tout vecteur de \mathcal{P} , en particulier au vecteur \overrightarrow{MB} . On a donc : $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Par ailleurs, le point M étant un point du cercle de diamètre $[AB]$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

On en déduit finalement : $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Les vecteurs \overrightarrow{SM} et \overrightarrow{MB} sont orthogonaux.

Finalement :

Les droites (SM) et (MB) sont orthogonales.

Remarque : ces droites sont mêmes perpendiculaires puisqu'elles sont sécantes ...

c) Par définition du point H , les vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{SM} sont orthogonaux.

On a par ailleurs : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH}) \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MB}$.

On a déjà vu que le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$ était nul.

Le point H étant un point de la droite (SM) , perpendiculaire à la droite (MB) , on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{MH} et \overrightarrow{MB} sont orthogonaux.

Finalement : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$; les vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{MB} sont orthogonaux.

Le vecteur \overrightarrow{AH} est donc orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{SM} et \overrightarrow{MB} du plan (SMB) :

La droite (AH) est perpendiculaire au plan (SMB) .

d) Pour démontrer que les plans (AMS) et (BMS) sont perpendiculaires, nous allons démontrer qu'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

D'après la question précédente, le vecteur \overrightarrow{AH} est un vecteur normal au plan (BMS) .

A la question b), nous avons montré que les vecteurs \overrightarrow{SM} et \overrightarrow{MB} étaient orthogonaux. Par ailleurs, nous avons déjà vu que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{MB} étaient également orthogonaux.

Les vecteurs \overrightarrow{SM} et \overrightarrow{AM} n'étant pas colinéaires (il faudrait que S soit un point de \mathcal{P}), on déduit de ce qui précède que le vecteur \overrightarrow{MB} est un vecteur normal au plan (AMS) .

Nous allons maintenant établir que les deux vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{MB} sont orthogonaux.

A la question c), nous avons établi que la droite (AH) était perpendiculaire au plan (SMB) . Elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan ; en particulier à la droite (MB) . On en déduit finalement que les vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{MB} sont orthogonaux.

Les plans (AMS) et (BMS) sont perpendiculaires.

e) Les points H et K sont des points du plan (SMB) . Or, d'après la question c), la droite (AH) est perpendiculaire à ce plan. Elle est ainsi perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par H , en particulier la droite (HK) .

Les droites (AH) et (HK) étant perpendiculaires, l'angle \widehat{AHK} est droit.

On en conclut finalement :

Le triangle AHK est rectangle en H .

D'après la question b), le triangle SMB est rectangle en M . Dans le plan (SMB) , le cercle circonscrit à ce triangle admet donc pour diamètre le segment $[HB]$. Ainsi, le point K , point du plan (SMB) , appartient à ce cercle si, et seulement si, le produit scalaire $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KB}$ est nul.

Or, les points K , S et B sont alignés. On a donc : $\overrightarrow{KB} = \alpha \overrightarrow{SB}$ (le réel α ne nous intéresse pas en tant que tel) et : $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KB} = \alpha \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{SB}$.

On va donc s'intéresser au produit scalaire $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{SB}$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{SB}.$$

La droite (AH) étant perpendiculaire au plan (SMB) , on a : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$.

Par ailleurs : $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$ est nul par définition du point K .

On a donc : $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KB} = 0$. Le point K appartient bien, dans le plan (SMB) , au cercle de diamètre $[HB]$.

Finalement :

Les points M , B , K et H sont cocycliques.

N°113 page 324

a) On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{R}, M(x; y; z) \in \mathcal{P}_m &\Leftrightarrow \\ \forall m \in \mathbb{R}, mx + y + (m-1)z + 2m + 1 = 0 &\Leftrightarrow \\ \forall m \in \mathbb{R}, m(x+z+2) + (y-z+1) = 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases} & \end{aligned}$$

On a bien l'équivalence :

$$\forall m \in \mathbb{R}, M(x; y; z) \in \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

b) On a :

$$\begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-z \\ y=-1+z \end{cases}$$

Les points M de l'espace sont donc les points dont les coordonnées sont de la forme :

$$(-2-z; -1+z; z)$$

Si on appelle O l'origine du repère, on a : $\overline{OM} = \overline{OA} + z\vec{u}$ avec $A(-2; -1; 0)$, $\vec{u}(-1; 1; 1)$ et z un réel quelconque. Cette égalité se réécrit : $\overline{AM} = z\vec{u}$ et l'ensemble des points considérés est donc la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

L'ensemble des points appartenant à tous les plans \mathcal{P}_m est la droite $(A; \vec{u})$ avec $A(-2; -1; 0)$, $\vec{u}(-1; 1; 1)$.

N°114 page 324

Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

Dans ces conditions, la distance d s'écrit : $d = \frac{|\delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$, d'où : $\frac{1}{d^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\delta^2}$.

Comme $A(a; 0; 0) \in (ABC)$, on a : $a \times \alpha + 0 \times \beta + 0 \times \gamma + \delta = 0$.

Soit : $\frac{\alpha}{\delta} = -\frac{1}{a}$ et, enfin : $\frac{\alpha^2}{\delta^2} = \frac{1}{a^2}$.

En raisonnant de la même façon avec les points B et C , on obtient respectivement : $\frac{\beta^2}{\delta^2} = \frac{1}{b^2}$

et $\frac{\gamma^2}{\delta^2} = \frac{1}{c^2}$.

Il vient alors :

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\delta^2} = \frac{\alpha^2}{\delta^2} + \frac{\beta^2}{\delta^2} + \frac{\gamma^2}{\delta^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Le résultat est ainsi établi.

N°115 page 324

1. Par définition on a : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ et $\overrightarrow{A'M'} = s\vec{u}'$.

La droite (MM') est perpendiculaire aux droites d et d' si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et \vec{u} , d'une part, $\overrightarrow{MM'}$ et \vec{u}' , d'autre part, sont orthogonaux.

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \text{ et } \vec{u} \text{ orthogonaux} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MM'} \text{ et } \vec{u}' \text{ orthogonaux} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}' = 0 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (-t\vec{u} + \overrightarrow{AA'} + s\vec{u}') \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \\ &-t\vec{u} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} + s(\vec{u} \cdot \vec{u}') = 0 \Leftrightarrow t - (\vec{u} \cdot \vec{u}')s = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Remarque : la dernière équivalence résulte du fait que le vecteur \vec{u} est unitaire.

On procède de façon analogue avec le second produit scalaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}' = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'}) \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow (-t\vec{u} + \overrightarrow{AA'} + s\vec{u}') \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow \\ &-(\vec{u} \cdot \vec{u}')t + \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}' + (\vec{u}' \cdot \vec{u}')s = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{u}')t - s = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}' \end{aligned}$$

Remarque : la dernière équivalence résulte du fait que le vecteur \vec{u}' est unitaire.

On a raisonné par équivalence. Finalement :

La droite (MM') est perpendiculaire aux droites d et d' si, et seulement si, on a le système, d'inconnues s et t :

$$\begin{cases} t - (\vec{u} \cdot \vec{u}')s = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} \\ (\vec{u} \cdot \vec{u}')t - s = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}' \end{cases}$$

2. Supposons que l'on ait $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

Le système se récrit alors :

$$\begin{cases} t = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} \\ -s = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}' \end{cases}$$

Il admet pour unique solution le couple : $(t; s) = (\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}; -\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}')$.

Supposons maintenant que l'on ait $\vec{u} \cdot \vec{u}' \neq 0$.

En multipliant la première égalité du système par $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ et en lui soustrayant la seconde, il vient :

$$-(\vec{u} \cdot \vec{u}')^2 s + s = (\vec{u} \cdot \vec{u}')(\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}) - \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}'$$

Soit :

$$s[1 - (\vec{u} \cdot \vec{u}')^2] = (\vec{u} \cdot \vec{u}')(\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}) - \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}'$$

Peut-on avoir : $(\vec{u} \cdot \vec{u}')^2 = 1$?

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' étant unitaires, on a ;

$$(\vec{u} \cdot \vec{u}')^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{u}'\|^2 \times \cos^2(\vec{u}, \vec{u}') = \cos^2(\vec{u}, \vec{u}').$$

On en déduit :

$$(\vec{u} \cdot \vec{u}')^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\vec{u}, \vec{u}') = 1 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{u}') = \pm 1 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{u}' \text{ ou } \vec{u} = -\vec{u}'$$

Ces deux situations sont absurdes car alors les droites d et d' seraient coplanaires.

On a donc finalement : $(\vec{u} \cdot \vec{u}')^2 \neq 1$. D'où, enfin :

$$s = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u}')(\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}) - \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}'}{1 - (\vec{u} \cdot \vec{u}')^2}$$

Il vient alors :

$$t = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{u}')s = \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{u}') \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u}')(\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}) - \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}'}{1 - (\vec{u} \cdot \vec{u}')^2} = \frac{\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}')(\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}')}{1 - (\vec{u} \cdot \vec{u}')^2}$$

Ici encore, le système admet un unique couple solution :

$$(t; s) = \left(\frac{\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}')(\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}')}{1 - (\vec{u} \cdot \vec{u}')^2}; \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u}')(\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}) - \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}'}{1 - (\vec{u} \cdot \vec{u}')^2} \right)$$

Remarque : lorsque $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$, ces formules redonne la solution obtenue ci-dessus.

En définitive, dans tous les cas, le système $\begin{cases} t - (\vec{u} \cdot \vec{u}') s = \overline{AA'} \cdot \vec{u} \\ (\vec{u} \cdot \vec{u}') t - s = \overline{AA'} \cdot \vec{u}' \end{cases}$ admet une unique

solution. Il existe donc un unique couple de points M et M' , appartenant aux droites d et d' respectivement, tel que la droite (MM') soit perpendiculaire à ces deux droites.

Conclusion générale (A retenir ! Ce pourrait être un résultat de cours ...) :

Deux droites non coplanaires de l'espace admettent une unique perpendiculaire commune.

N°117 page 325

On peut supposer que les points A et B sont distincts (étudiez le cas où ils sont confondus ... Vous constaterez assez vite qu'il ne présente pas un gros intérêt ☺).

Gardons présent à l'esprit que nous cherchons ici des couples de points.

Soit (P, Q) l'un d'eux. La présence de la somme $\overline{AP} + \overline{AQ}$ dans la première égalité suggère d'introduire le point I milieu du segment $[PQ]$. On a alors :

$$\overline{AB} + \overline{AP} + \overline{AQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AI} + \overline{IB} + \overline{AI} + \overline{IP} + \overline{AI} + \overline{IQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{IB} - 3\overline{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow I = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On conclut ainsi que la position du point I est fixée.

Le produit scalaire apparaissant dans la deuxième égalité nous conduit à (cf. le théorème de la médiane) :

$$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = (\overline{AI} + \overline{IP}) \cdot (\overline{AI} + \overline{IQ}) = AI^2 + \overline{AI} \cdot (\overline{IP} + \overline{IQ}) + \overline{IP} \cdot \overline{IQ} = AI^2 - \frac{PQ^2}{4}$$

On a donc :

$$AB^2 + \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AI^2 - \frac{PQ^2}{4} = 0$$

Or, dans le premier calcul, on avait : $\overline{AB} + 2\overline{AI} = \vec{0}$, d'où : $AI^2 = \frac{AB^2}{4}$. Il vient alors :

$$AB^2 + \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AI^2 - \frac{PQ^2}{4} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{PQ^2}{4} \Leftrightarrow PQ^2 = 5AB^2 \Leftrightarrow PQ = \sqrt{5}AB$$

De ce qui précède, on tire que les contraintes $\overline{AB} + \overline{AP} + \overline{AQ} = \vec{0}$ et $AB^2 + \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = 0$ équivalent à :

- Le segment $[PQ]$ admet pour milieu le point I défini par : $I = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -3 & 1 \end{array} \right)$;
- Le segment $[PQ]$ a pour longueur : $\sqrt{5}AB$.

Ces caractéristiques équivalent à écrire que le segment $[PQ]$ est un diamètre de la sphère de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2} AB$.

L'ensemble des couples (P, Q) solutions du système $\begin{cases} \overline{AB} + \overline{AP} + \overline{AQ} = \vec{0} \\ AB^2 + \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = 0 \end{cases}$ est l'ensemble des couples de points, extrémités des diamètres de la sphère de centre I défini par : $I = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -3 & 1 \end{array} \right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2} AB$.

N°131 page 327

1. a) on a :

$$\begin{aligned} \overline{DM} \cdot \overline{DL} &= (\overline{OM} - \overline{OD}) \cdot (\overline{OL} - \overline{OD}) \\ &= \overline{OM} \cdot \overline{OL} - \overline{OM} \cdot \overline{OD} - \overline{OL} \cdot \overline{OD} + \overline{OD}^2 \\ &= a\overline{OA} \cdot a\overline{OC} - a\overline{OA} \cdot \overline{OD} - a\overline{OC} \cdot \overline{OD} + \overline{OD}^2 \\ &= a^2\overline{OA} \cdot \overline{OC} - a\overline{OA} \cdot \overline{OD} - a\overline{OC} \cdot \overline{OD} + \overline{OD}^2 \end{aligned}$$

Comme le repère $(O; \overline{OA}, \overline{OC}, \overline{OD})$ est orthonormal, on a : $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OD} = 0$, $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = 0$ et $\overline{OD}^2 = OD^2 = 1$. D'où, finalement :

$$\boxed{\overline{DM} \cdot \overline{DL} = 1}$$

Remarque : on pouvait également utiliser des coordonnées.

On a en effet :

$$\overline{DM} = \overline{OM} - \overline{OD} = a\overline{OA} - \overline{OD} \Rightarrow \overline{DM}(a; 0; -1)$$

Et :

$$\overline{DL} = \overline{OL} - \overline{OD} = a\overline{OC} - \overline{OD} \Rightarrow \overline{DL}(0; a; -1)$$

On retrouve : $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DL} = a \times 0 + 0 \times a + 1 \times 1 = 1$.

b) Le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ étant orthonormal, on a, en utilisant les coordonnées ci-dessus : $\|\overrightarrow{DM}\| = \|\overrightarrow{DL}\| = \sqrt{a^2 + 1}$.

Or : $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DL} = \|\overrightarrow{DM}\| \cdot \|\overrightarrow{DL}\| \cdot \cos \widehat{MDL}$.

Il vient alors : $1 = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DL} = (a^2 + 1) \cdot \cos \widehat{MDL}$.

D'où :

$$\boxed{\cos \widehat{MDL} = \frac{1}{a^2 + 1}}$$

c) On a : $\cos^2 \widehat{MDL} + \sin^2 \widehat{MDL} = 1 = \frac{1}{(a^2 + 1)^2} + \sin^2 \widehat{MDL}$. D'où :

$$\sin^2 \widehat{MDL} = 1 - \frac{1}{(a^2 + 1)^2} = \frac{(a^2 + 1)^2 - 1}{(a^2 + 1)^2} = \frac{[(a^2 + 1) - 1] \times [(a^2 + 1) + 1]}{(a^2 + 1)^2} = \frac{a^2 \times (a^2 + 2)}{(a^2 + 1)^2}$$

En tant que sinus d'un angle géométrique dans un triangle, $\sin \widehat{MDL}$ est, lui aussi, positif.
On a alors :

$$\sin \widehat{MDL} = \sqrt{\frac{a^2 \times (a^2 + 2)}{(a^2 + 1)^2}} = \frac{a\sqrt{a^2 + 2}}{a^2 + 1}$$

$$\boxed{\sin \widehat{MDL} = \frac{a\sqrt{a^2 + 2}}{a^2 + 1}}$$

d) Notons $\mathcal{A}(DML)$ l'aire du triangle DML . DML , on a la formule classique :

$$\mathcal{A}(DML) = \frac{1}{2} \times \sin \widehat{MDL} \times DM \times DL$$

Soit, en tenant compte du résultat précédent :

$$\mathcal{A}(DML) = \frac{1}{2} \times \sin \widehat{MDL} \times DM \times DL = \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{a^2+2}}{a^2+1} \times \sqrt{a^2+1} \times \sqrt{a^2+1} = \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+2}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(DML) = \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+2}}$$

e) Le point K est défini par l'égalité : $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$. Or, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OD}$.

On a donc : $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{OD}$.

Il vient alors : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + a\overrightarrow{OD}$.

D'où, finalement : $\overrightarrow{OK}(1;1;a)$.

Comme $\overrightarrow{DM}(a;0;-1)$ et $\overrightarrow{DL}(0;a;-1)$, on a :

$$\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{DM} = 1 \times a + 1 \times 0 + a \times (-1) = a + 0 - a = 0$$

Et :

$$\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{DL} = 1 \times 0 + 1 \times a + a \times (-1) = 0 + a - a = 0$$

Le vecteur \overrightarrow{OK} est donc orthogonal aux deux vecteurs \overrightarrow{DM} et \overrightarrow{DL} , non colinéaires. On en déduit :

La droite (OK) est perpendiculaire au plan (DLM) .

2. a) On a classiquement :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OK}$$

Or, la droite (OK) étant perpendiculaire au plan (DLM) et H étant le projeté orthogonal du point K sur ce plan, elle est perpendiculaire à toute droite du plan (DLM) passant par H . En particulier la droite (HM) . On en déduit ainsi que les vecteurs \overrightarrow{HM} et \overrightarrow{OK} sont orthogonaux. Soit : $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OK} = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}}$$

b) On pose $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OK}$.

L'égalité obtenue à la question précédente se réécrit :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK} = \lambda \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OK} = \lambda \|\overrightarrow{OK}\|^2$$

Comme $\overrightarrow{OM}(a; 0; 0)$ et $\overrightarrow{OK}(1; 1; a)$, on a : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = a$ et $\|\overrightarrow{OK}\|^2 = 1^2 + 1^2 + a^2 = a^2 + 2$.

D'où :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \lambda \|\overrightarrow{OK}\|^2 \Leftrightarrow a = \lambda (a^2 + 2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{a}{a^2 + 2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{a}{a^2 + 2}}$$

On a d'abord : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $a^2 + 2 \geq 2 > 0$. Le rapport $\frac{a}{a^2 + 2}$ est également strictement positif.

Par ailleurs, on a : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $a^2 + 2 > a$. En effet, le discriminant associé au trinôme $a^2 - a + 2$ est strictement négatif. On en déduit qu'il garde un signe constant pour tout a réel (et donc à fortiori tout a strictement positif), en l'occurrence positif puisque le coefficient de a^2 vaut 1. Finalement, on a, en divisant par $a^2 + 2$: $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $1 > \frac{a}{a^2 + 2}$.

En définitive : $\lambda \in]0; 1[$ et on en déduit :

Le point H appartient au segment $[OK]$.