# *Racine nième*

Corrigés d'exercices

Page 159 : N°**80**, **82**, **84**, **86**, **88**, **89**, **91**, **92**, **94**, **97**
Page 162 : N°**105**
Page 164 : N°**122**
Page 165 : N°**130**, **132**
Page 167 : N°**138**

## N°80 page 159

$$5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}=5^{\frac{2}{3}}\times 25^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{3}}\times\left(5^2\right)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{2\times\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{2}{6}}=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=5^1=\boxed{5}$$

$$2\times\sqrt[10]{1024}=2\times 1024^{\frac{1}{10}}=2\times\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{10}}=2\times 2^{10\times\frac{1}{10}}=2\times 2^1=2\times 2=\boxed{4}$$

$$\sqrt[5]{81}\times 3^{\frac{1}{5}}=81^{\frac{1}{5}}\times 3^{\frac{1}{5}}=\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times 3^{\frac{1}{5}}=3^{4\times\frac{1}{5}}\times 3^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{5}}\times 3^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}=3^1=\boxed{3}$$

## N°82 page 159

1. a) Comme *k* est positif, *k* appartient à l'ensemble de définition de la fonction *f*.
   Par ailleurs, on a immédiatement : $f\left(k\right)=k^3-k^3=0$ .
   On en déduit :

$$\boxed{k \text{ est une racine de } f \text{ sur } \left[0;+\infty\right[ .}$$

b) D'après le résultat de la question précédente, on peut factoriser la fonction polynôme f par $x-k$ :

$$f\left(x\right)=x^3-k^3=\left(x-k\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$$

Or : $\left(x-k\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=\alpha x^3+\left(\beta-k\alpha\right)x^2+\left(\gamma-k\beta\right)x-k\gamma$ .
Par identification, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - k\alpha = 0 \\ \gamma - k\beta = 0 \\ -k\gamma = -k^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = k \\ \gamma = k^2 \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) = x^3 - k^3 = (x-k)\left(x^2 + kx + k^2\right)}$$

2. On a d'abord :

$$\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)$$

En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente avec $x = \sqrt[3]{a}$ et $k = \sqrt[3]{b}$, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) &= \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 \\ &= a - b\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b}$$

## N°84 page 159

a) On a : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 2\left(2+\sqrt{3}\right)$.

D'où : $\left(1+\sqrt{3}\right)^4 = \left[2\left(2+\sqrt{3}\right)\right]^2 = 4\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 4\left(4+4\sqrt{3}+3\right) = 4\left(7+4\sqrt{3}\right)$.

$$\boxed{\left(1+\sqrt{3}\right)^4 = 4\left(7+4\sqrt{3}\right)}$$

b) D'après ce qui précède et en tenant compte du fait que $1+\sqrt{3}$ est strictement positif, on a :

$$1+\sqrt{3} = \sqrt[4]{4\left(7+4\sqrt{3}\right)} = \sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$$

Finalement :

$$\boxed{\sqrt{2}\times\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}}$$

## N°86 page 159

a) $\sqrt[4]{2x-1}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ 2x-1=2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{2^4+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{17}{2}$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{17}{2}\right\}}$$

b) $\sqrt[5]{x+1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x=\dfrac{1}{2^5}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x=\dfrac{1}{32}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{32}-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{31}{32}$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{31}{32}\right\}}$$

c) Comme $x^2+1>0$ pour tout $x$ réel, on a :

$$\sqrt[3]{x^2+1}=2 \Leftrightarrow x^2+1=2^3 \Leftrightarrow x^2=8-1=7 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\right\}}$$

## N°88 page 159

a) On résout l'équation dans $\mathbb{R}_+$ et on a alors :

$$x^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{1}{5}}=6 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{5}} \\ X\geq 0 \\ X^2-X=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{5}} \\ X\geq 0 \\ X^2-X-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{5}} \\ X\geq 0 \\ (X+2)(X-3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{5}} \\ X=3 \end{cases} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{5}}=3 \Leftrightarrow x=3^5=243$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{243\}}$$

b) On résout l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a alors :

$$x^{\frac{1}{3}}+12x^{-\frac{1}{3}}=-7 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ X>0 \\ X+12\dfrac{1}{X}=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ X>0 \\ X^2+7X+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ X>0 \\ (X+4)(X+3)=0 \end{cases}$$

Les deux solutions de l'équation $(X+4)(X+3)=0$ étant strictement négatives, on en déduit que le système n'admet pas de solution.
On aurait pu conclure encore plus rapidement en notant que pour tout *x* strictement positif, on a $x^{\frac{1}{3}}>0$, $x^{-\frac{1}{3}}>0$ et donc $x^{\frac{1}{3}}+12x^{-\frac{1}{3}}>0$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$$

## N°89 page 159

On remarque que l'on a : $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}$ et $\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^2=y^{\frac{3}{2}}$. On pose alors : $X=x^{\frac{1}{3}}$ et $Y=y^{\frac{3}{4}}$ et il vient :

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{3}{4}}=8 \\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{3}{2}}=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ Y=y^{\frac{3}{4}} \\ X\geq 0,\ Y\geq 0 \\ X+Y=8 \\ X^2+Y^2=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ Y=y^{\frac{3}{4}} \\ X\geq 0,\ Y\geq 0 \\ Y=8-X \\ X^2+(8-X)^2=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ Y=y^{\frac{3}{4}} \\ X\geq 0,\ Y\geq 0 \\ Y=8-X \\ 2X^2-16X+64=40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ Y=y^{\frac{3}{4}} \\ X\geq 0,\ Y\geq 0 \\ Y=8-X \\ X^2-8X+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^{\frac{1}{3}} \\ Y=y^{\frac{3}{4}} \\ X\geq 0,\ Y\geq 0 \\ Y=8-X \\ (X-2)(X-6)=0 \end{cases}$$

Avec $X=2$, il vient : $Y=6$. Puis : $x=X^3=2^3=8$ et $y=Y^{\frac{4}{3}}=6^{\frac{4}{3}}=6^{1+\frac{1}{3}}=6\times 6^{\frac{1}{3}}=6\sqrt[3]{6}$.
On obtient ainsi un premier couple solution : $(x;y)=\left(8;6\sqrt[3]{6}\right)$.

Avec $X=6$, il vient : $Y=2$. Puis : $x=X^3=6^3=216$ et $y=Y^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{4}{3}}=6^{1+\frac{1}{3}}=2\times 2^{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{2}$
On obtient ainsi un deuxième couple solution : $(x;y)=\left(216;2\sqrt[3]{2}\right)$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\left(8;6\sqrt[3]{6}\right),\left(216;2\sqrt[3]{2}\right)\right\}}$$

## N°91 page 159

Pour $x=0$, on a : $\sqrt[6]{0}=0^{\frac{1}{6}}=0$ et $\sqrt[12]{0^{11}}=\sqrt[12]{0}=0^{\frac{1}{12}}=0$ et les deux membres de l'inéquation sont égaux, elle est donc vérifiée. 0 est solution de l'inéquation.

Pour tout réel *x* strictement positif, on a :

$$\sqrt[6]{x}\le 8\sqrt[12]{x^{11}}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}}\le 8x^{\frac{11}{12}}\Leftrightarrow \frac{1}{8}\le\frac{x^{\frac{11}{12}}}{x^{\frac{1}{6}}}\Leftrightarrow 8^{-1}\le x^{\frac{11}{12}-\frac{1}{6}}\Leftrightarrow$$

$$2^{-3}\le x^{\frac{9}{12}}\Leftrightarrow 2^{-3}\le x^{\frac{3}{4}}\Leftrightarrow x\ge\left(2^{-3}\right)^{\frac{4}{3}}\Leftrightarrow x\ge 2^{-4}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{16}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}=\{0\}\cup\left[\frac{1}{16};+\infty\right[}$$

## N°92 page 159

Du fait du terme $\sqrt[3]{x}$, on résout cette équation dans $\mathbb{R}_+$ :

$$2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+2=0\Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}+2=0\Leftrightarrow\begin{cases}X=x^{\frac{1}{3}}\\ X\ge 0\\ 2X^2-5X+2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}X=x^{\frac{1}{3}}\\ X\ge 0\\ 2X^2-5X+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=x^{\frac{1}{3}}\\ X\ge 0\\ 2(X-2)\left(X-\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}$$

Avec $X=2$, il vient $x=X^3=2^3=8$.

Avec $X=\frac{1}{2}$, il vient : $x=X^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{8};8\right\}}$$

## N°94 page 159

1. Pour tout *x* réel, on a : $2x^2+1\geq 2>0$. La fonction *f* est donc définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique.

   Par ailleurs, pour tout *x* réel, on a :

   $$f(-x)=\sqrt[3]{2(-x)^2+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}=f(x)$$

   De ce qui précède, on tire :

   **La fonction *f* est paire.**

2. Pour tout *x* réel, on a : $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+1}=\left(2x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}\ln\left(2x^2+1\right)}$.

   Or, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2x^2+1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left(2x^2+1\right)=+\infty$.

   Or, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{3}\ln\left(2x^2+1\right)}=+\infty$.

   Finalement :

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

   La fonction *f* étant paire, on en déduit immédiatement :

   $$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$$

3. La fonction *f* est la composée de la fonction $x\mapsto 2x^2+1$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $[1;+\infty[$, et de la fonction racine cubique $x\mapsto\sqrt[3]{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $[1;+\infty[$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   **La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.**

Pour tout $x$ réel, on a : $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+1}=\left(2x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}$.

On en déduit alors (dérivation d'une composée) :

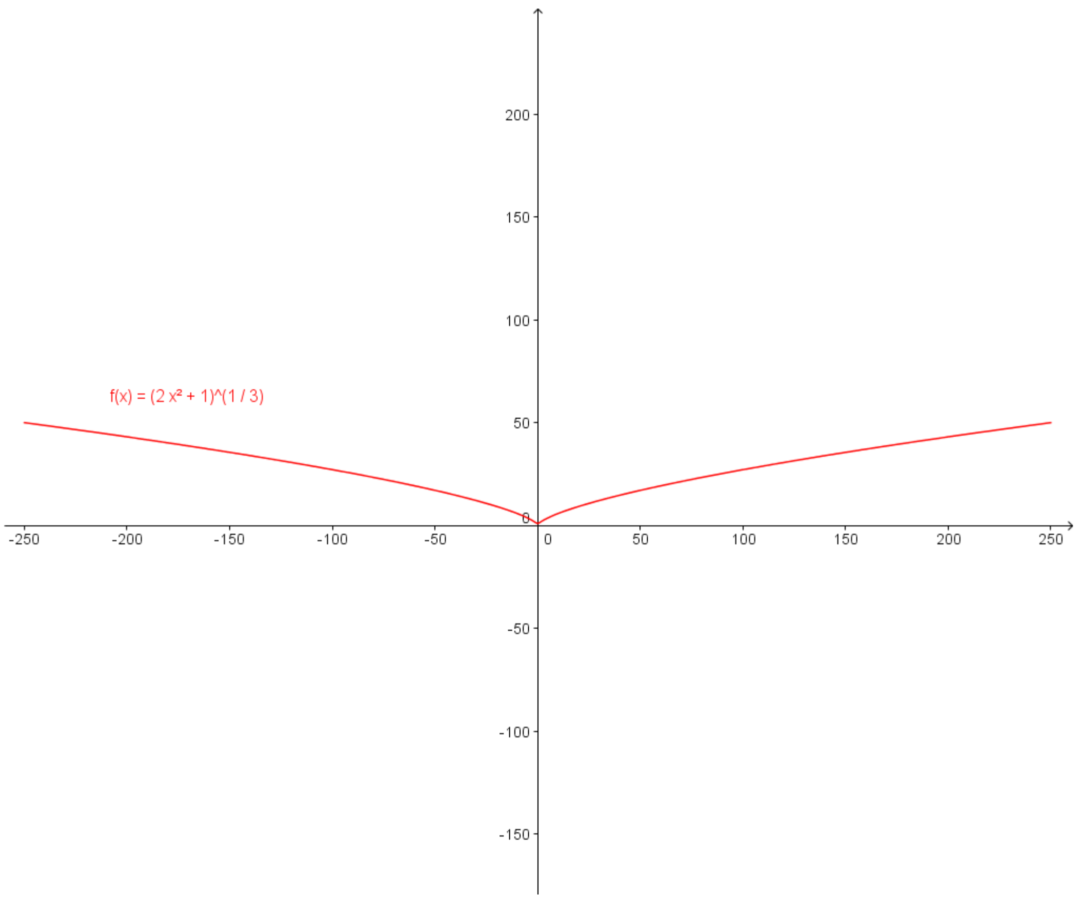
$$f'(x)=\frac{1}{3}\times 2x\times\left(2x^2+1\right)^{\frac{1}{3}-1}=\frac{2}{3}x\left(2x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2}}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2}}}$$

4. Pour tout x réel, on a : $\left(2x^2+1\right)^2\geq 1>0$ d'où : $\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2}>0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $x$ :

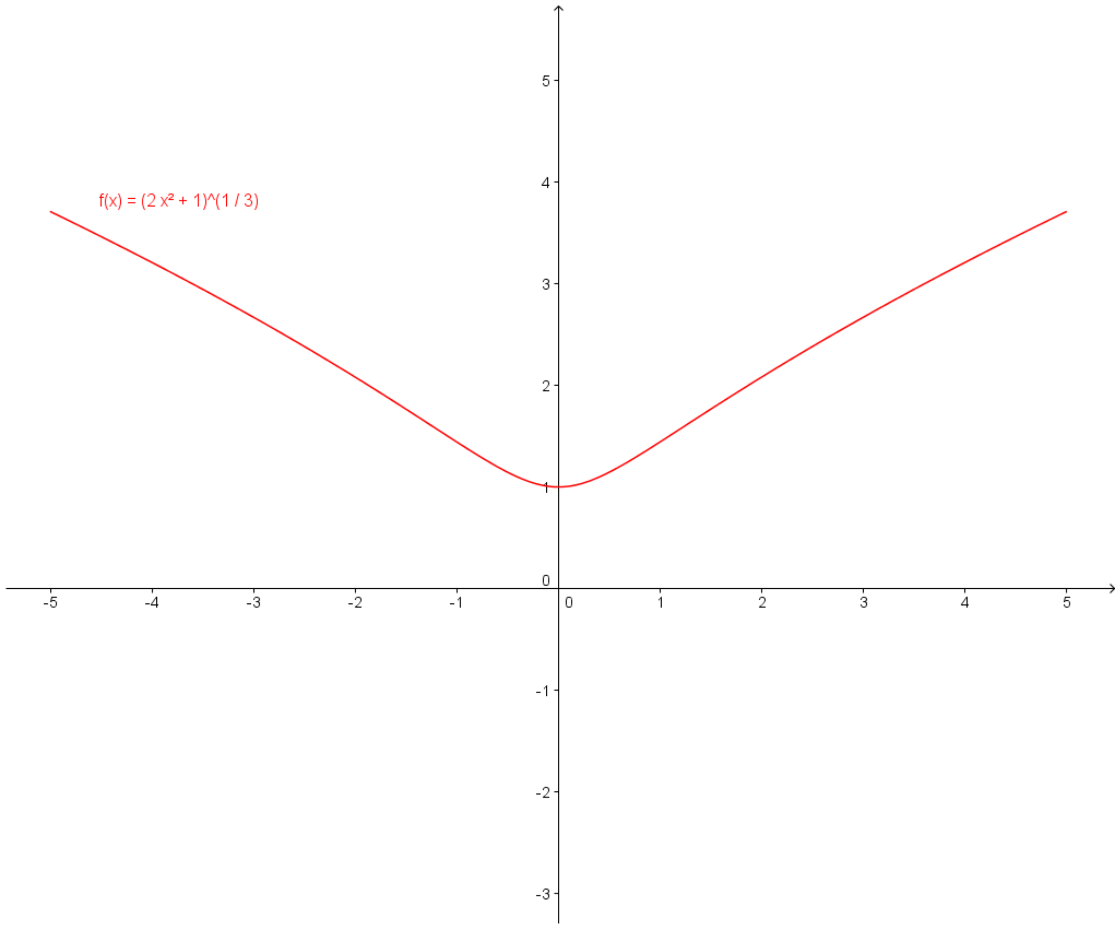
- Sur $\mathbb{R}_-^*$, on a : $f'(x)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante ;
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x)>0$ et la fonction *f* est strictement croissante.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous la courbe représentative de la fonction *f* pour *x* compris entre $-250$ et 250 …




*Courbe représentative de la fonction* $x\mapsto\sqrt[3]{2x^2+1}$ *pour* $x\in[-250;250]$.

… puis pour *x* compris entre $-5$ et 5 (tangente horizontale à l'origine) :




*Courbe représentative de la fonction* $x \mapsto \sqrt[3]{2x^2+1}$ *pour* $x \in [-5;5]$.

**N°97 page 159**

1. a) La fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de la fonction racine quatrième, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (pour $x > 0$), et de la fonction inverse, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction linéaire.

   La fonction *f* est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

   Pour tout réel *x* strictement positif, on a alors :

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1} + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{4}\left(2 - x^{-\frac{5}{4}}\right)$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{4}\left(2-x^{-\frac{5}{4}}\right)}$$

b) On a :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}\left(2-x^{-\frac{5}{4}}\right)=0\Leftrightarrow 2-x^{-\frac{5}{4}}=0\Leftrightarrow x^{-\frac{5}{4}}=2\Leftrightarrow\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)^{-\frac{4}{5}}=2^{-\frac{4}{5}}\Leftrightarrow x=2^{-\frac{4}{5}}$$

| |
|---|
| La fonction $f'$ s'annule en $x_0=2^{-\frac{4}{5}}$. |

c) La fonction $x\mapsto x^{\frac{1}{4}}$ (racine quatrième) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. le cours) et prend ses valeurs dans cet intervalle. La fonction $x\mapsto x^{-5}=\frac{1}{x^5}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme inverse d'une fonction strictement croissante sur cet intervalle. La fonction $x\mapsto x^{-\frac{5}{4}}$ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x\mapsto\frac{1}{4}(2-x)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Finalement, la fonction $f'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

En utilisant le résultat de la question précédente, il vient alors :

- Pour $x\in\left]0;2^{-\frac{4}{5}}\right[$, $f'(x)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante ;
- $f'\left(2^{-\frac{4}{5}}\right)=0$ ;
- Pour $x\in\left]2^{-\frac{4}{5}};+\infty\right[$, $f'(x)>0$ et la fonction *f* est strictement croissante.

Remarque : on déduit de ce qui précède que la fonction *f* admet un minimum global en $x_0=2^{-\frac{4}{5}}$. Les résultats des calculs de limites qui suivent doivent être en accord avec ce résultat.

Par ailleurs, on a :

$$f(x_0)=f\left(2^{-\frac{4}{5}}\right)=\left(2^{-\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}2^{-\frac{4}{5}}=2^{-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}+2^{-1}\times2^{-\frac{4}{5}}=2^{\frac{1}{5}}+2^{-1-\frac{4}{5}}$$
$$=2^{\frac{1}{5}}+2^{-\frac{9}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\left(1+2^{-\frac{10}{5}}\right)=2^{\frac{1}{5}}\left(1+2^{-2}\right)=2^{\frac{1}{5}}\times\frac{5}{4}\simeq1,435\ 873$$

2. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{4}} = 0^{\frac{1}{4}} = 0$ et la fonction racine quatrième prend des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-\frac{1}{4}} = +\infty$. Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{2}x\right) = 0$. D'où :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty}$$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{4}} = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{4}} = 0$. Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}x\right) = +\infty$. D'où :

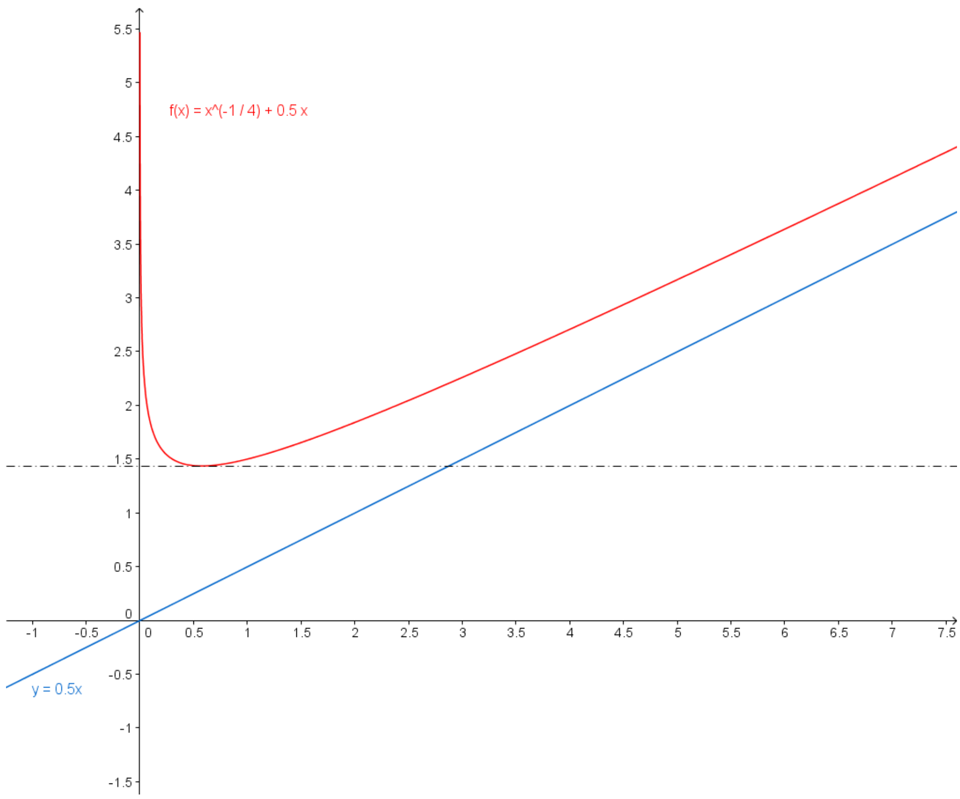
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Ces résultats sont cohérents avec l'existence d'un minimum en $x_0 = 2^{-\frac{4}{5}}$.

3. a) D'après la question précédente, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{4}} = 0$. D'où :

| |
|---|
| La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* admet en $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta$ d'équation : $y = \frac{1}{2}x$. |

b) On obtient :



## N°105 page 162

1. On a $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$. On obtient donc facilement les tableaux de variations des fonctions *f* et *g* à partir de ceux des fonctions racine cubique ( $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ ) et racine quatrième ( $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ ).

   Il vient donc :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

   Et :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. $f(x)=g(x)$ équivaut à : $\begin{cases} x>0 \\ x^{-\frac{1}{3}}=2x^{\frac{1}{4}} \end{cases}$.

   Il vient alors :

$$\begin{cases} x>0 \\ x^{-\frac{1}{3}}=2x^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=2x^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1=2x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1=2x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1=2x^{\frac{7}{12}} \end{cases}$$

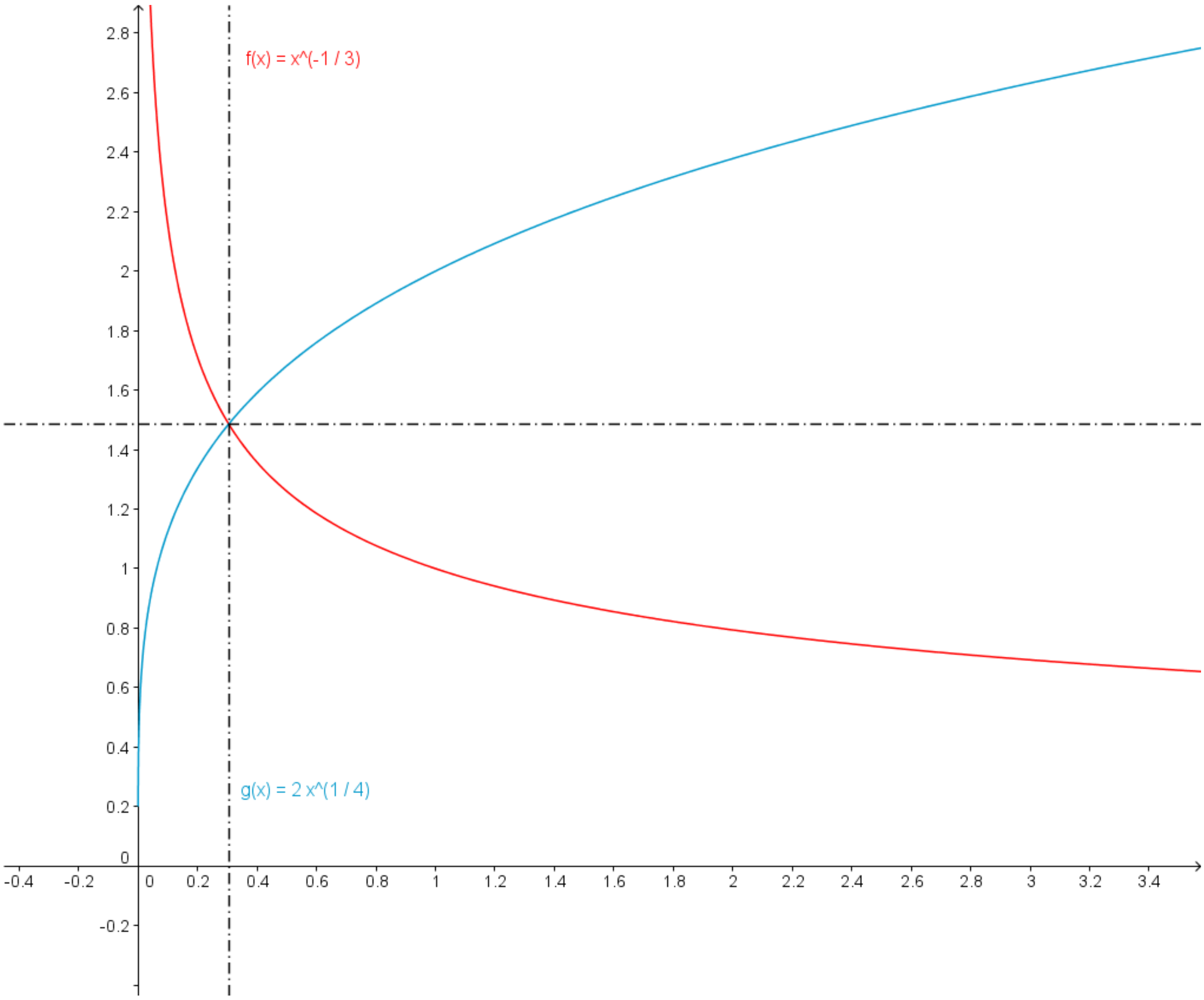
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^{\frac{7}{12}}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^{\frac{7}{12}}=2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\left(2^{-1}\right)^{\frac{12}{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=2^{-\frac{12}{7}} \end{cases} \Leftrightarrow x=2^{-\frac{12}{7}}$$

| L'équation $f(x)=g(x)$ admet comme unique solution : $x=2^{-\frac{12}{7}}\simeq 0,3$. |
|---|

A titre de complément, on a :

$$f\left(2^{-\frac{12}{7}}\right)=g\left(2^{-\frac{12}{7}}\right)=\left(2^{-\frac{12}{7}}\right)^{-\frac{1}{3}}=2^{-\frac{12}{7}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^{\frac{4}{7}}\simeq 1,5$$

3. a) et b) On obtient :




## N°122 page 164

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction racine nième dans un repère orthonormal.

a) La dérivée de la fonction racine nième est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \mapsto \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. Pour $x=1$, elle prend donc la valeur $\frac{1}{n}$.

On a par ailleurs : $\sqrt[n]{1}=1^{\frac{1}{n}}=1$.

L'équation réduite de la tangente $\mathrm{T}_n$ à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse $x=1$ s'écrit donc :

$$\boxed{y=\frac{1}{n}(x-1)+1}$$

La droite $\mathrm{T}_n$ coupe l'axe des ordonnées en un point dont l'abscisse est nulle. D'après l'équation obtenue précédemment, son ordonnée vaut donc : $y=\frac{1}{n}(0-1)+1=1-\frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{L'ordonnée du point d'intersection de la droite } \mathrm{T}_n \text{ avec l'axe des ordonnées vaut : } 1-\frac{1}{n}.}$$

b) On considère la fonction *h* définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(x)=\sqrt[n]{x}-\frac{1}{n}(x-1)-1$.

La fonction *h* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction racine nième et la fonction affine : $x\mapsto -\frac{1}{n}(x-1)-1$).
On a alors, pour tout réel *x* strictement positif :

$$h'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}-1}-1\right)=\frac{1}{n}\left(x^{\frac{1-n}{n}}-1\right)=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}\left(1-x^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

Pour tout réel *x* strictement positif, le facteur $\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$ l'est également.

Le signe de $h'(x)$ est donc celui de la différence : $1-x^{\frac{n-1}{n}}=1-\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$.

La fonction racine nième est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et prend ses valeurs dans cet intervalle. Comme $n\geq 2$, on a $n-1>0$ et la fonction $x\mapsto x^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction $x\mapsto \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}=x^{\frac{n-1}{n}}$, composée des deux précédentes, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, la fonction $x\mapsto 1-x^{\frac{n-1}{n}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme elle s'annule pour $x=1$, il vient :

- Pour $x\in\left]0;1\right[$, on a $h'(x)>0$ et la fonction *h* est strictement croissante ;
- Pour $x\in\left]1;+\infty\right[$, on a $h'(x)<0$ et la fonction *h* est strictement décroissante.

La fonction *h* étant continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions continues sur cet intervalle, on peut étendre la conclusion à ce point.

Finalement :

- Pour $x \in [0;1]$, la fonction $h$ est strictement croissante ;
- Pour $x \in [1;+\infty[$, la fonction $h$ est strictement décroissante.

c) D'après ce qui précède, la fonction h admet un maximum pour $x=1$. La valeur maximale prise par $h$ vaut donc : $h(1)=\sqrt[n]{1}-\frac{1}{n}(1-1)-1=1-0-1=0$.

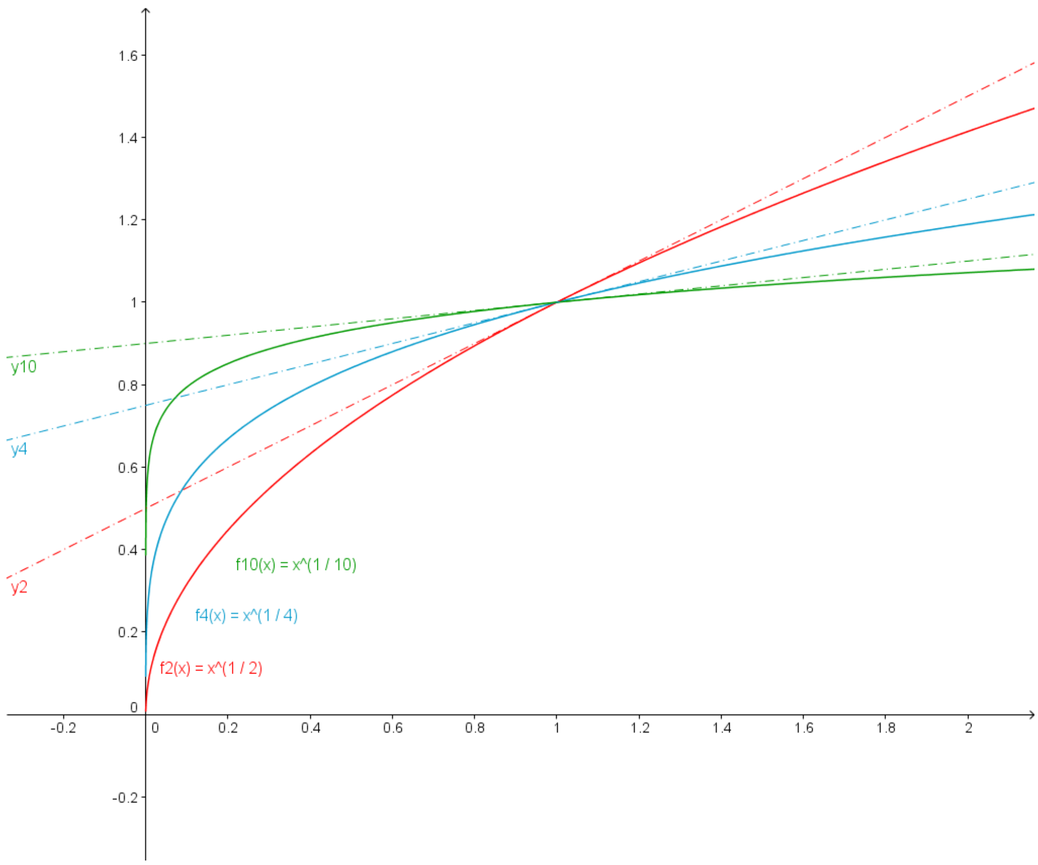
On en déduit que pour tout $x$ positif, on a : $h(x)\leq 0$.

Soit : $\sqrt[n]{x}-\frac{1}{n}(x-1)-1\leq 0$, ou encore : $\sqrt[n]{x}\leq \frac{1}{n}(x-1)+1$.

Pour une valeur de $x$ donnée, l'ordonnée $\left(\sqrt[x]{x}\right)$ du point correspondant sur $\mathscr{C}_n$ est inférieure à l'ordonnée $\left(\frac{1}{n}(x-1)+1\right)$ du point correspondant sur $\mathrm{T}_n$. D'où :

La courbe représentative $\mathscr{C}_n$ de la fonction racine nième
est située sous la tangente $\mathrm{T}_n$ au point d'abscisse $x=1$.

A titre d'illustration, nous avons tracé dans un même repère orthonormal les courbes et les tangentes correspondant à $n=2$ (rouge), 4 (bleu) et 10 (vert) :



# N°130 page 165

1. Les réels *a* et *b* étant positifs, il en va de même pour les réels $a+b$ et $2\sqrt{ab}$.
   Pour les comparer, nous pouvons comparer leurs carrés :

$$\left(a+b\right)^2 = a^2+b^2+2ab \text{ et } \left(2\sqrt{ab}\right)^2 = 4ab$$

   On a alors :

$$\begin{aligned}\left(a+b\right)^2-\left(2\sqrt{ab}\right)^2 &= a^2+b^2+2ab-4ab\\ &= a^2+b^2-2ab\\ &= \left(a-b\right)^2\end{aligned}$$

   On a donc : $\left(a+b\right)^2 \geq \left(2\sqrt{ab}\right)^2$, d'où, finalement :

$$\boxed{a+b\geq 2\sqrt{ab}}$$

2. Remarquons d'abord que l'inégalité est immédiatement vérifiée si l'un des réels *a*, *b* ou *c* est nul. Nous pouvons donc supposer, à partir de maintenant que les trois réels a, b et c sont non nuls (donc strictement positifs).

   Nous devons donc ici comparer deux réels strictement positifs. La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous pouvons comparer $\left(a+b+c\right)^3$ et $\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^3 = 27abc$.
   Soit alors *b* et *c* deux réels strictement positifs <u>fixés</u> quelconques et soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi\left(x\right) = \left(x+b+c\right)^3 - 27xbc$$

   La fonction $\varphi$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout *x* réel strictement positif :

$$\begin{aligned}\varphi'\left(x\right) &= 3\left(x+b+c\right)^2-27bc\\ &= 3\left[\left(x+b+c\right)^2-9bc\right]\\ &= 3\left[\left(x+b+c\right)^2-\left(3\sqrt{bc}\right)^2\right]\\ &= 3\left[x+b+c-3\sqrt{bc}\right]\left[x+b+c+3\sqrt{bc}\right]\end{aligned}$$

   Le facteur $x+b+c+3\sqrt{bc}$ est strictement positif.

Quant au facteur $x+b+c-3\sqrt{bc}$, il s'annule pour $x_0=-(b+c)+3\sqrt{bc}$ qui peut être positif ($b=c=1$ par exemple) ou négatif ($b=1$ et $c=9$ par exemple).

Nous devons donc distinguer plusieurs situations :

→ Si $x_0=-(b+c)+3\sqrt{bc}<0$

Pour tout réel *x* de $\mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi'(x)>0$ et la fonction $\varphi$ est strictement croissante.
On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\varphi(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[(x+b+c)^3-27xbc\right]=(b+c)^3>0$ et on en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x)>0$$

→ Si $x_0=-(b+c)+3\sqrt{bc}>0$

- Pour tout réel *x* de $]0;x_0[$, on a $\varphi'(x)<0$ et la fonction $\varphi$ est strictement décroissante ;
- Pour tout réel *x* de $]x_0;+\infty[$, on a $\varphi'(x)>0$ et la fonction $\varphi$ est strictement croissante.

La fonction $\varphi$ admet donc un minimum global en $x_0$.
Or, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x_0)&=\varphi\left(-(b+c)+3\sqrt{bc}\right)\\&=\left(3\sqrt{bc}\right)^3-27\left(-(b+c)+3\sqrt{bc}\right)bc\\&=27bc\sqrt{bc}-27\left(-(b+c)+3\sqrt{bc}\right)bc\\&=27bc\left(\sqrt{bc}+b+c-3\sqrt{bc}\right)\\&=27bc\left(b+c-2\sqrt{bc}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a : $b+c\geq 2\sqrt{bc}$. On en tire alors : $\varphi(x_0)\geq 0$, puis :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x)\geq 0$$

Le cas $x_0=-(b+c)+3\sqrt{bc}=0$ se traite comme le précédent.

Dans toutes les situations, on a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x)\geq 0$$

On a donc, pour tout x réel strictement positif :

$$(x+b+c)^3-27xbc\geq 0$$

Soit :

$$x+b+c\geq 3\sqrt[3]{xbc}$$

On en tire, *b* et *c* ayant été choisis quelconques dans $\mathbb{R}_+^*$ :

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$$

L'inégalité est finalement valable pour tous réels *a*, *b* et *c* dans $\mathbb{R}_+$ :

| |
|---|
| Pour tous réels *a*, *b* et *c* dans $\mathbb{R}_+$, on a : <br> $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ |

## N°132 page 165

Les réels $n^{\frac{1}{n}}$ et $3^{\frac{1}{3}}$ étant strictement positifs, nous pouvons comparer leurs logarithmes népériens : $\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{n}\ln n}\right)=\frac{1}{n}\ln n$ et, en particulier, pour $n=3$ : $\ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\ln 3$.

Considérons alors la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$.
Elle y est dérivable comme rapport de deux fonctions dérivables et on a, pour tout *x* réel strictement positif :

$$\varphi'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

En tenant compte de : $\ln x=1\Leftrightarrow x=e$ et du fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

- Pour $x\in\left]0;e\right[$, $\varphi'(x)>0$ et la fonction $\varphi$ est strictement croissante ;
- Pour $x\in\left]e;+\infty\right[$, $\varphi'(x)<0$ et la fonction $\varphi$ est strictement décroissante.

Tavaillons d'abord sur l'intervalle $\left]e;+\infty\right[$. On a : $3\in\left]e;+\infty\right[$. Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a donc : $\frac{\ln n}{n}=\varphi(n)\leq\varphi(3)=\frac{\ln 3}{3}$. D'où : $n^{\frac{1}{n}}\leq 3^{\frac{1}{3}}$.

Il reste donc à traiter les cas $n=1$ et $n=2$.

On a d'abord : $1<3$ et la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit : $1^{\frac{1}{3}}<3^{\frac{1}{3}}$, soit $1<3^{\frac{1}{3}}$. Or : $1^{\frac{1}{1}}=1^1=1$. On a donc : $1^{\frac{1}{1}}<3^{\frac{1}{3}}$ et l'inégalité est bien vérifiée pour $n=1$.

Pour $n=2$, il convient de comparer : $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ et $3^{\frac{1}{3}}$. La fonction $x\mapsto x^6$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous pouvons comparer les puissances sixièmes de ces deux nombres :

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6=2^3=8 \text{ et } \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$$

Comme $8<9$, il vient $2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$. L'inégalité est vérifiée pour $n=2$.

Conclusion générale :

Pour tout *n* entier naturel non nul, on a : $n^{\frac{1}{n}}\le 3^{\frac{1}{3}}$.

## N°138 page 167

1. Comme : $0^{\frac{2}{3}}=\left(0^{\frac{1}{3}}\right)^2=0^2=0$, il vient : $f(0)=(4-0)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3=2^3=8$.

   Par ailleurs : $8^{\frac{2}{3}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2=2^2=4$. D'où : $f(8)=(4-4)^{\frac{3}{2}}=0^{\frac{3}{2}}=\left(0^{\frac{1}{2}}\right)^3=0^3=0$.

$$\boxed{f(0)=8 \text{ et } f(8)=0}$$

2. a) On cherche : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-8}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-8}{x}$.

   Nous avons affaire ici à une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

   L'exposant de $\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ comportant un 2 au dénominateur, nous pouvons utiliser l'expression conjuguée.

Pour tout $x$ strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-8}{x} &= \frac{\left[f(x)-8\right]\left[f(x)+8\right]}{x\left[f(x)+8\right]} \\
&= \frac{\left(f(x)\right)^2-8^2}{x\left[f(x)+8\right]} \\
&= \frac{\left[\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2-64}{x\left[\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+8\right]} \\
&= \frac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3-64}{x\left[\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+8\right]}
\end{aligned}$$

Le facteur $\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+8$ du dénominateur ne pose pas de problème puisqu'il tend vers 16 lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Nous nous intéressons donc désormais à $\dfrac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3-64}{x}$ pour tout $x$ réel strictement positif. On a, en développant le cube au numérateur :

$$\begin{aligned}
\frac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3-64}{x} &= \frac{\cancel{4^3}-3\times 4^2\times x^{\frac{2}{3}}+3\times 4\times\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3\cancel{-64}}{x} \\
&= \frac{-48\times x^{\frac{2}{3}}+12\times x^{\frac{4}{3}}-x^2}{x} \\
&= -48x^{-\frac{1}{3}}+12x^{\frac{1}{3}}-x
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(12x^{\frac{1}{3}}-x\right)=0-0=0$ mais : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-48x^{-\frac{1}{3}}\right)=-\infty$ .

On en déduit finalement :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-8}{x} = -\infty}$$

b) On vient d'obtenir : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-8}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ .

On en déduit immédiatement :

| La fonction *f* n'est pas dérivable en 0 (à droite). |
|---|

c) D'après le résultat précédent, on peut conclure que :

| La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* admet<br>en son point d'abscisse nulle une tangente verticale. |
|---|

3. a) Pour tout réel *x* strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1}\right) \times \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-1} = -x^{-\frac{1}{3}} \times \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

| Pour tout *x* de $]0;8]$, $f'(x) = -x^{-\frac{1}{3}} \times \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ |
|---|

b) Pour tout *x* strictement positif (et donc à fortiori sur $]0;8]$) on a $x^{-\frac{1}{3}} > 0$ . Pour tout *x* de $[0;8[$ , on a : $4 - x^{\frac{2}{3}} > 0$ et donc $\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$ .

On déduit de ce qui précède que la dérivée de f est négative sur $]0;8]$ et ne s'y annule que pour $x = 8$ . La fonction *f* est donc strictement décroissante sur cet intervalle. Comme elle est continue sur $[0;8]$ comme composée de fonctions continues, on en déduit finalement :

| La fonction *f* est strictement décroissante sur $[0;8]$ . |
|---|

4. On obtient :