
Racine nième

Corrigés d'exercices

Page 159 : N°80, 82, 84, 86, 88, 89, 91, 92, 94, 97

Page 165 : N°130, 132

Page 162 : N°105

Page 167 : N°138

Page 164 : N°122

N°80 page 159

$$5^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[6]{25} = 5^{\frac{2}{3}} \times 25^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2 \times 1}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 5^1 = \boxed{5}$$

$$2 \times \sqrt[10]{1024} = 2 \times 1024^{\frac{1}{10}} = 2 \times (2^{10})^{\frac{1}{10}} = 2 \times 2^{10 \times \frac{1}{10}} = 2 \times 2^1 = 2 \times 2 = \boxed{4}$$

$$\sqrt[5]{81} \times 3^{\frac{1}{5}} = 81^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}} = (3^4)^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}} = 3^{4 \times \frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = 3^1 = \boxed{3}$$

N°82 page 159

1. a) Comme k est positif, k appartient à l'ensemble de définition de la fonction f .

Par ailleurs, on a immédiatement : $f(k) = k^3 - k^3 = 0$.

On en déduit :

k est une racine de f sur $[0; +\infty[$.

b) D'après le résultat de la question précédente, on peut factoriser la fonction polynôme f par $x - k$:

$$f(x) = x^3 - k^3 = (x - k)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

Or : $(x - k)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + (\beta - k\alpha)x^2 + (\gamma - k\beta)x - k\gamma$.

Par identification, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - k\alpha = 0 \\ \gamma - k\beta = 0 \\ -k\gamma = -k^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = k \\ \gamma = k^2 \end{cases}$$

Racine n^{ième}
Corrigés d'exercices

On a donc finalement :

$$\forall x \geq 0, f(x) = x^3 - k^3 = (x - k)(x^2 + kx + k^2)$$

2. On a d'abord :

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})\left((\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2\right)$$

En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente avec $x = \sqrt[3]{a}$ et $k = \sqrt[3]{b}$, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) &= (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})\left((\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2\right) \\ &= (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 \\ &= a - b\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

N°84 page 159

a) On a : $(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 2(2 + \sqrt{3})$.

D'où : $(1 + \sqrt{3})^4 = [2(2 + \sqrt{3})]^2 = 4(2 + \sqrt{3})^2 = 4(4 + 4\sqrt{3} + 3) = 4(7 + 4\sqrt{3})$.

$$(1 + \sqrt{3})^4 = 4(7 + 4\sqrt{3})$$

b) D'après ce qui précède et en tenant compte du fait que $1 + \sqrt{3}$ est strictement positif, on a :

$$1 + \sqrt{3} = \sqrt[4]{4(7 + 4\sqrt{3})} = \sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$$

Finalement :

$$\sqrt{2} \times \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

N°86 page 159

$$a) \sqrt[4]{2x-1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{2^4+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{17}{2} \right\}$$

$$b) \sqrt[5]{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{1}{2^5} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{1}{32} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{32} - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{31}{32}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{31}{32} \right\}$$

c) Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout x réel, on a :

$$\sqrt[3]{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2+1 = 2^3 \Leftrightarrow x^2 = 8-1 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$$

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

N°88 page 159

a) On résout l'équation dans \mathbb{R}_+ et on a alors :

$$x^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{1}{5}} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{5}} \\ X \geq 0 \\ X^2 - X = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{5}} \\ X \geq 0 \\ X^2 - X - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{5}} \\ X \geq 0 \\ (X+2)(X-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{5}} \\ X = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{5}} = 3 \Leftrightarrow x = 3^5 = 243$$

$$\mathcal{S} = \{243\}$$

b) On résout l'équation dans \mathbb{R}_+^* et on a alors :

$$x^{\frac{1}{3}} + 12x^{\frac{1}{3}} = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ X > 0 \\ X + 12\frac{1}{X} = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ X > 0 \\ X^2 + 7X + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ X > 0 \\ (X + 4)(X + 3) = 0 \end{cases}$$

Les deux solutions de l'équation $(X + 4)(X + 3) = 0$ étant strictement négatives, on en déduit que le système n'admet pas de solution.

On aurait pu conclure encore plus rapidement en notant que pour tout x strictement positif, on a $x^{\frac{1}{3}} > 0$, $x^{\frac{1}{3}} > 0$ et donc $x^{\frac{1}{3}} + 12x^{\frac{1}{3}} > 0$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

N°89 page 159

On remarque que l'on a : $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$ et $\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^2 = y^{\frac{3}{2}}$. On pose alors : $X = x^{\frac{1}{3}}$ et $Y = y^{\frac{3}{4}}$ et il vient :

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{3}{4}} = 8 \\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ Y = y^{\frac{3}{4}} \\ X \geq 0, Y \geq 0 \\ X + Y = 8 \\ X^2 + Y^2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ Y = y^{\frac{3}{4}} \\ X \geq 0, Y \geq 0 \\ Y = 8 - X \\ X^2 + (8 - X)^2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ Y = y^{\frac{3}{4}} \\ X \geq 0, Y \geq 0 \\ Y = 8 - X \\ 2X^2 - 16X + 64 = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ Y = y^{\frac{3}{4}} \\ X \geq 0, Y \geq 0 \\ Y = 8 - X \\ X^2 - 8X + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ Y = y^{\frac{3}{4}} \\ X \geq 0, Y \geq 0 \\ Y = 8 - X \\ (X - 2)(X - 6) = 0 \end{cases}$$

Avec $X = 2$, il vient : $Y = 6$. Puis : $x = X^3 = 2^3 = 8$ et $y = Y^{\frac{4}{3}} = 6^{\frac{4}{3}} = 6^{1+\frac{1}{3}} = 6 \times 6^{\frac{1}{3}} = 6\sqrt[3]{6}$.

On obtient ainsi un premier couple solution : $(x; y) = (8; 6\sqrt[3]{6})$.

Racine nième
Corrigés d'exercices

Avec $X = 6$, il vient : $Y = 2$. Puis : $x = X^3 = 6^3 = 216$ et $y = Y^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 6^{1+\frac{1}{3}} = 2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$
On obtient ainsi un deuxième couple solution : $(x; y) = (216; 2\sqrt[3]{2})$.

$$\mathcal{S} = \left\{ (8; 6\sqrt[3]{6}), (216; 2\sqrt[3]{2}) \right\}$$

N°91 page 159

Pour $x = 0$, on a : $\sqrt[6]{0} = 0^{\frac{1}{6}} = 0$ et $\sqrt[12]{0^{11}} = \sqrt[12]{0} = 0^{\frac{1}{12}} = 0$ et les deux membres de l'inéquation sont égaux, elle est donc vérifiée. 0 est solution de l'inéquation.

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{x} \leq 8\sqrt[12]{x^{11}} &\Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}} \leq 8x^{\frac{11}{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{x^{\frac{11}{12}}}{x^{\frac{1}{6}}} \Leftrightarrow 8^{-1} \leq x^{\frac{11}{12} - \frac{1}{6}} \Leftrightarrow \\ 2^{-3} \leq x^{\frac{9}{12}} &\Leftrightarrow 2^{-3} \leq x^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow x \geq (2^{-3})^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x \geq 2^{-4} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathcal{S} = \{0\} \cup \left[\frac{1}{16}; +\infty \right[$$

N°92 page 159

Du fait du terme $\sqrt[3]{x}$, on résout cette équation dans \mathbb{R}_+ :

$$2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ X \geq 0 \\ 2X^2 - 5X + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ X \geq 0 \\ 2X^2 - 5X + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^{\frac{1}{3}} \\ X \geq 0 \\ 2(X-2)\left(X - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Avec $X = 2$, il vient $x = X^3 = 2^3 = 8$.

Avec $X = \frac{1}{2}$, il vient : $x = X^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Finalement :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{8}; 8 \right\}$$

N°94 page 159

1. Pour tout x réel, on a : $2x^2 + 1 \geq 2 > 0$. La fonction f est donc définie sur \mathbb{R} qui est symétrique.

Par ailleurs, pour tout x réel, on a :

$$f(-x) = \sqrt[3]{2(-x)^2 + 1} = \sqrt[3]{2x^2 + 1} = f(x)$$

De ce qui précède, on tire :

La fonction f est paire.

2. Pour tout x réel, on a : $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1} = (2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln(2x^2 + 1)}$.

Or, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 + 1) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln(2x^2 + 1) = +\infty$.

Or, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3}\ln(2x^2 + 1)} = +\infty$.

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

La fonction f étant paire, on en déduit immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

3. La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto 2x^2 + 1$, dérivable sur \mathbb{R} et prenant ses valeurs dans $[1; +\infty[$, et de la fonction racine cubique $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Comme $[1; +\infty[$ est inclus dans \mathbb{R}_+^* , on en déduit que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

Racine nième
Corrigés d'exercices

Pour tout x réel, on a : $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1} = (2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$.

On en déduit alors (dérivation d'une composée) :

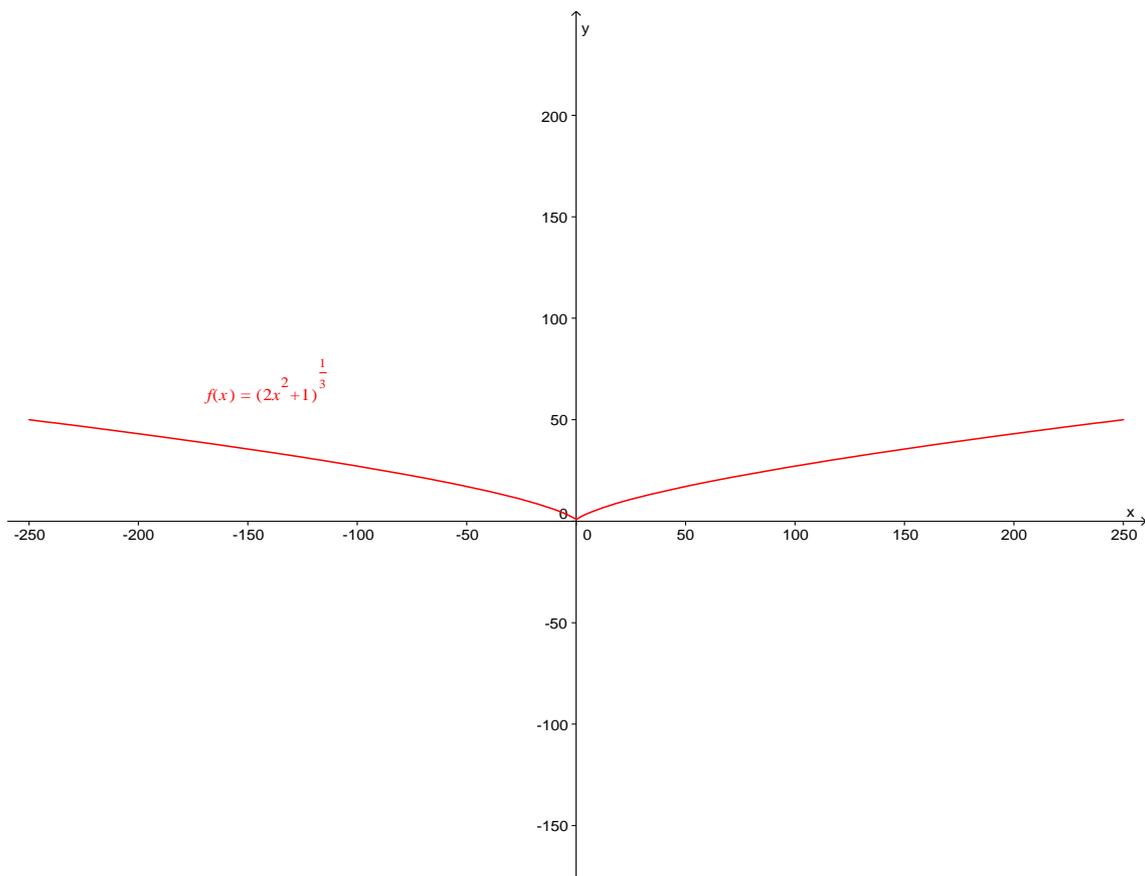
$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 2x \times (2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{2}{3} x (2x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{(2x^2 + 1)^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{(2x^2 + 1)^2}}$$

4. Pour tout x réel, on a : $(2x^2 + 1)^2 \geq 1 > 0$ d'où : $\sqrt[3]{(2x^2 + 1)^2} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de x :

- Sur \mathbb{R}_-^* , on a : $f'(x) < 0$ et la fonction f est strictement décroissante ;
 - Sur \mathbb{R}_+^* , on a : $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante.

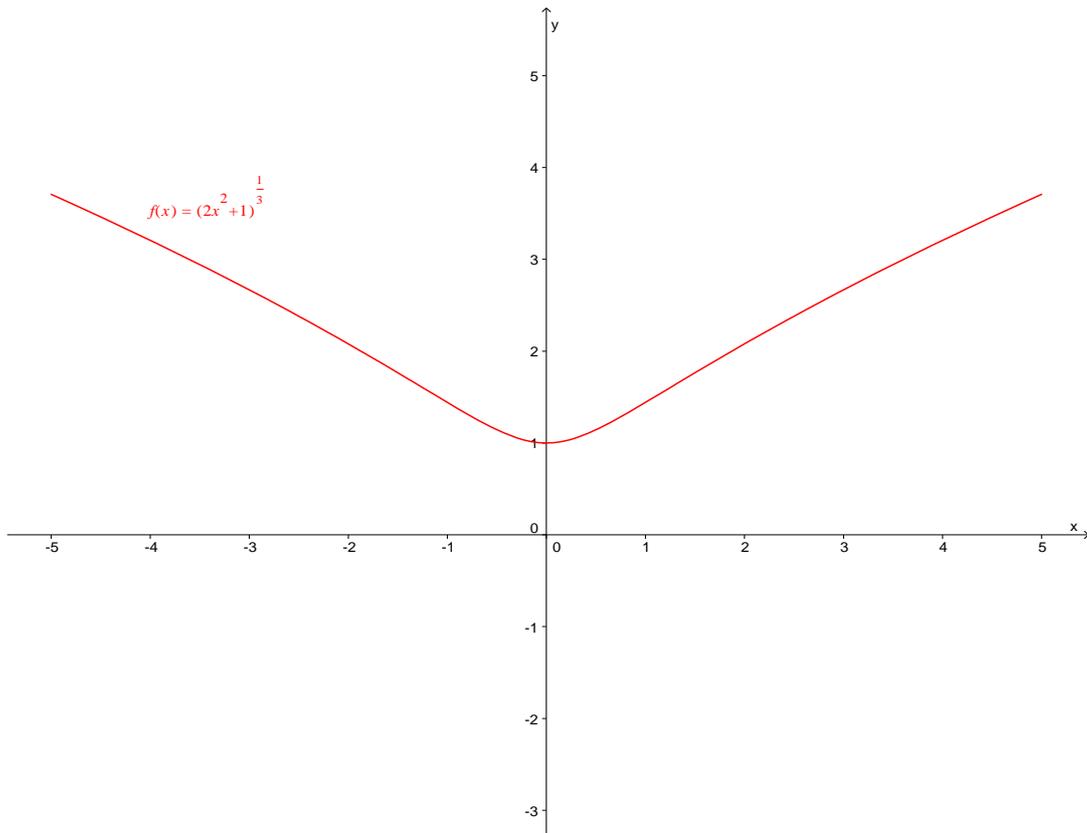
A titre de complément, nous fournissons ci-dessous la courbe représentative de la fonction f pour x compris entre -250 et 250 ...



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ pour $x \in [-250; 250]$.

Racine nième
Corrigés d'exercices

... puis pour x compris entre -5 et 5 (tangente horizontale à l'origine) :



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ pour $x \in [-5; 5]$.

N°97 page 159

1. a) La fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée de la fonction racine quatrième, dérivable sur \mathbb{R}_+^* et prenant ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* (pour $x > 0$), et de la fonction inverse, dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que fonction linéaire.

La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel x strictement positif, on a alors :

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} \left(2 - x^{-\frac{5}{4}} \right)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{4} \left(2 - x^{-\frac{5}{4}} \right)}$$

b) On a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(2 - x^{-\frac{5}{4}} \right) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^{-\frac{5}{4}} = 0 \Leftrightarrow x^{-\frac{5}{4}} = 2 \Leftrightarrow \left(x^{-\frac{5}{4}} \right)^{-\frac{4}{5}} = 2^{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{4}{5}}$$

La fonction f' s'annule en $x_0 = 2^{-\frac{4}{5}}$.

c) La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ (racine quatrième) est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* (cf. le cours) et prend ses valeurs dans cet intervalle. La fonction $x \mapsto x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* comme inverse d'une fonction strictement croissante sur cet intervalle. La fonction $x \mapsto x^{-\frac{5}{4}}$ est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}(2-x)$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement, la fonction f' est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

En utilisant le résultat de la question précédente, il vient alors :

- Pour $x \in \left] 0; 2^{-\frac{4}{5}} \right[$, $f'(x) < 0$ et la fonction f est strictement décroissante ;
- $f' \left(2^{-\frac{4}{5}} \right) = 0$;
- Pour $x \in \left] 2^{-\frac{4}{5}}; +\infty \right[$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante.

Remarque : on déduit de ce qui précède que la fonction f admet un minimum global en $x_0 = 2^{-\frac{4}{5}}$. Les résultats des calculs de limites qui suivent doivent être en accord avec ce résultat.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f \left(2^{-\frac{4}{5}} \right) = \left(2^{-\frac{4}{5}} \right)^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} 2^{-\frac{4}{5}} = 2^{-\frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{4} \right)} + 2^{-1} \times 2^{-\frac{4}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} + 2^{-1-\frac{4}{5}} \\ &= 2^{\frac{1}{5}} + 2^{-\frac{9}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \left(1 + 2^{-\frac{10}{5}} \right) = 2^{\frac{1}{5}} (1 + 2^{-2}) = 2^{\frac{1}{5}} \times \frac{5}{4} \approx 1,435\ 873 \end{aligned}$$

Racine n^{ième}
Corrigés d'exercices

2. On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\frac{1}{4}} = 0^{\frac{1}{4}} = 0$ et la fonction racine quatrième prend des valeurs strictement

positives sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\frac{1}{4}} = +\infty$. Par ailleurs : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{2}x\right) = 0$. D'où :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty}$$

On a aussi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{4}} = +\infty$. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{4}} = 0$. Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x\right) = +\infty$. D'où :

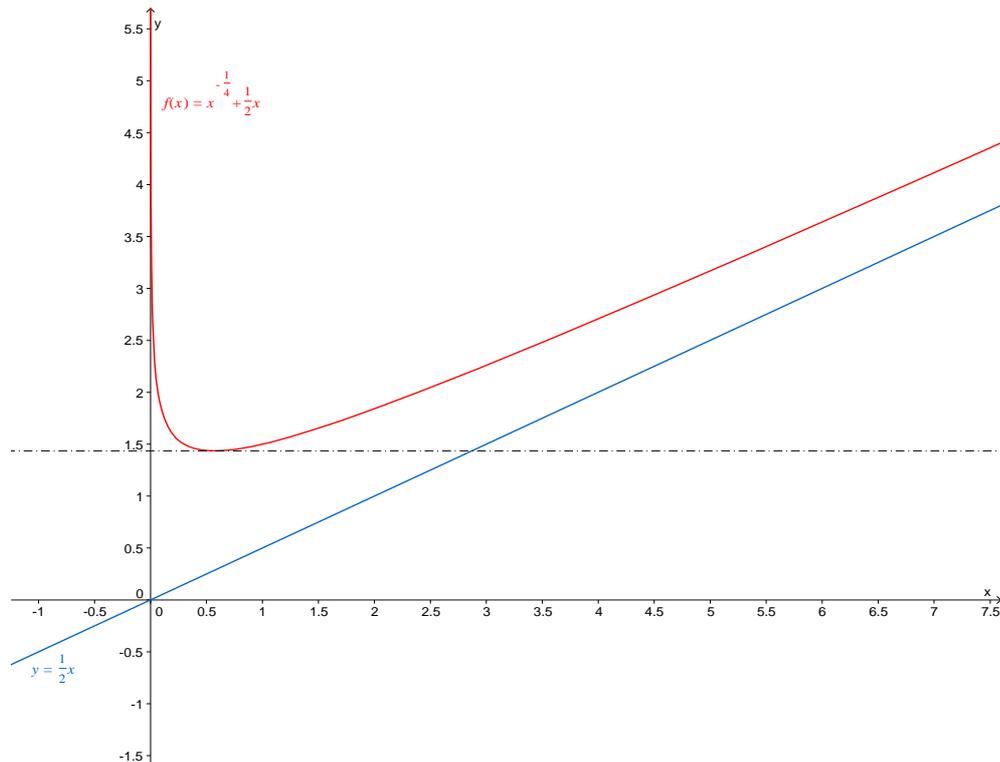
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

Ces résultats sont cohérents avec l'existence d'un minimum en $x_0 = 2^{-\frac{4}{5}}$.

3. a) D'après la question précédente, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{4}} = 0$. D'où :

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f admet en $+\infty$
une asymptote oblique Δ d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.

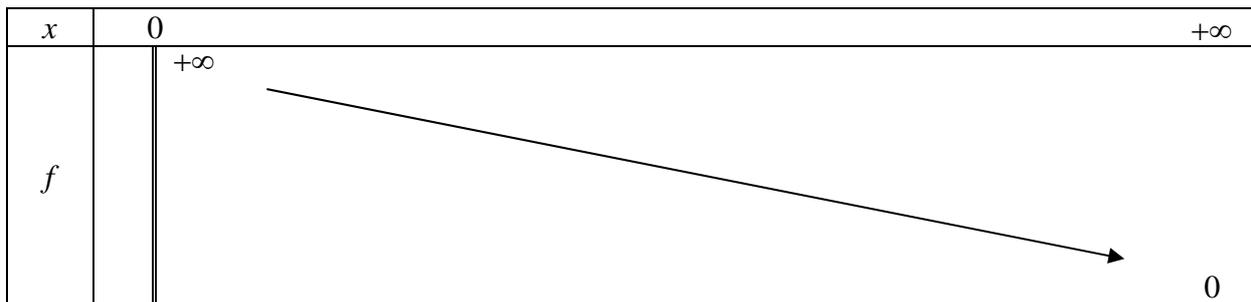
b) On obtient :



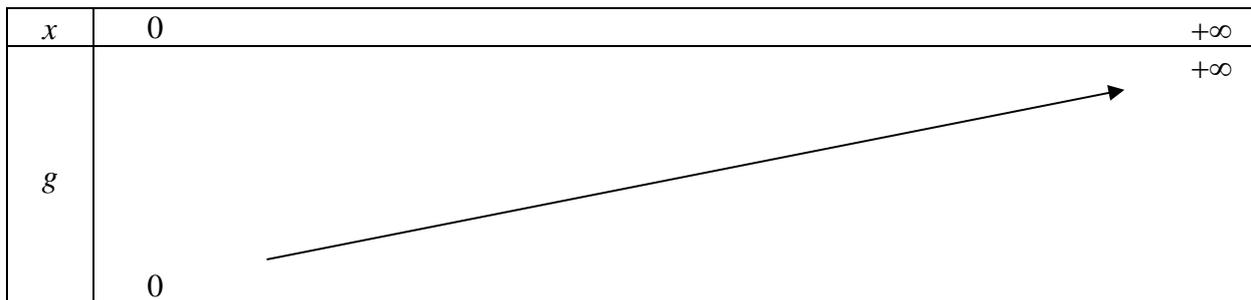
N°105 page 162

1. On a $f(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$. On obtient donc facilement les tableaux de variations des fonctions f et g à partir de ceux des fonctions racine cubique ($x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$) et racine quatrième ($x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$).

Il vient donc :



Et :



2. $f(x) = g(x)$ équivaut à : $\begin{cases} x > 0 \\ x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{1}{4}} \end{cases}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 0 \\ x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{1}{4}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 = 2x^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 = 2x^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 = 2x^{\frac{7}{12}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^{\frac{7}{12}} = 2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = (2^{-1})^{\frac{12}{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 2^{-\frac{12}{7}} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{12}{7}} \end{aligned}$$

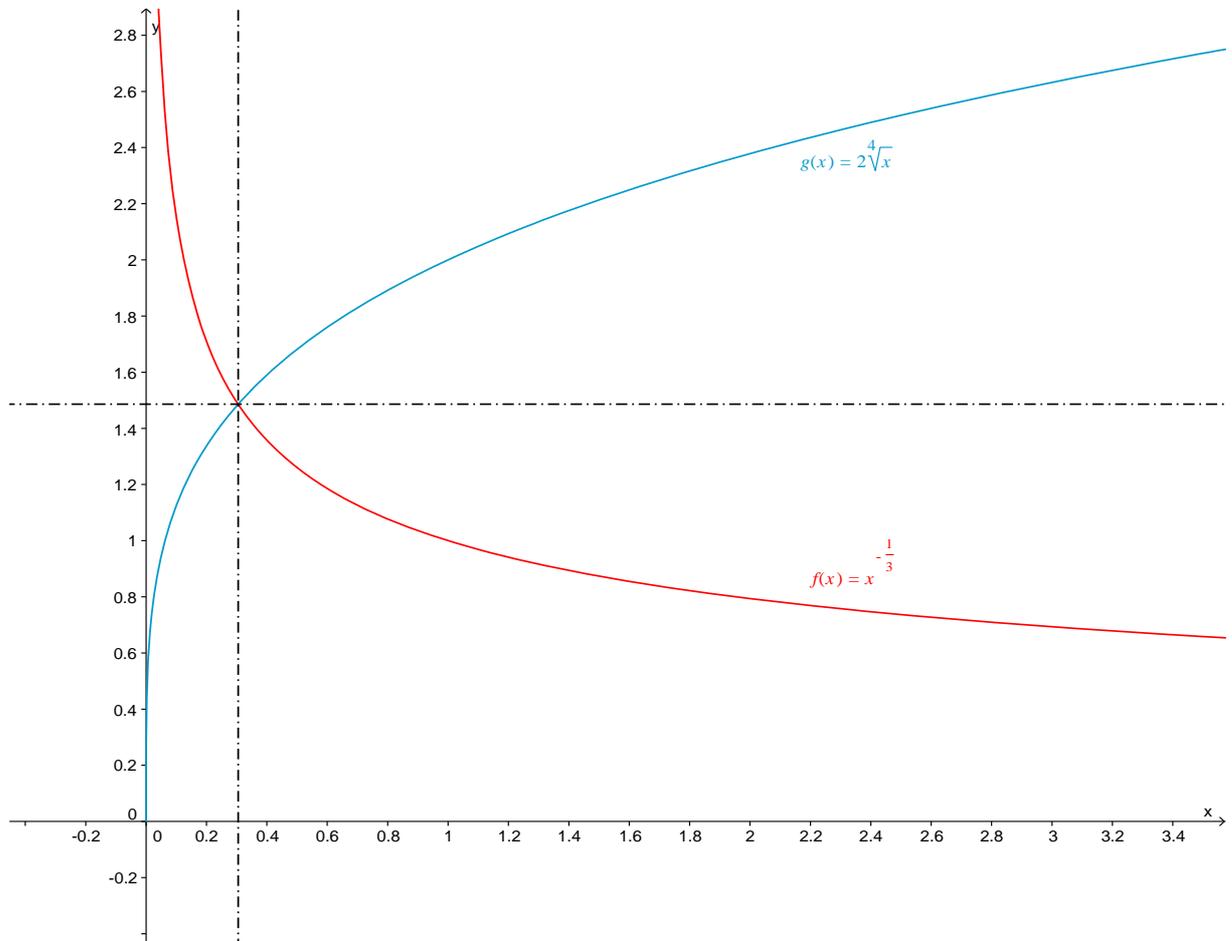
L'équation $f(x) = g(x)$ admet comme unique solution : $x = 2^{\frac{12}{7}} \approx 0,3$.

Racine n^{ième}
Corrigés d'exercices

A titre de complément, on a :

$$f\left(2^{-\frac{12}{7}}\right) = g\left(2^{-\frac{12}{7}}\right) = \left(2^{-\frac{12}{7}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{12}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{4}{7}} \approx 1,5$$

3. a) et b) On obtient :



N°122 page 164

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction racine n^{ième} dans un repère orthonormal.

a) La dérivée de la fonction racine n^{ième} est définie sur \mathbb{R}_+^* par : $x \mapsto \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$. Pour $x = 1$, elle prend donc la valeur $\frac{1}{n}$.

On a par ailleurs : $\sqrt[n]{1} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$.

Racine nième
Corrigés d'exercices

L'équation réduite de la tangente T_n à \mathcal{C}_n au point d'abscisse $x = 1$ s'écrit donc :

$$y = \frac{1}{n}(x-1) + 1$$

La droite T_n coupe l'axe des ordonnées en un point dont l'abscisse est nulle. D'après l'équation obtenue précédemment, son ordonnée vaut donc : $y = \frac{1}{n}(0-1) + 1 = 1 - \frac{1}{n}$.

L'ordonnée du point d'intersection de la droite T_n avec l'axe des ordonnées vaut : $1 - \frac{1}{n}$.

b) On considère la fonction h définie sur \mathbb{R}_+ par : $h(x) = \sqrt[n]{x} - \frac{1}{n}(x-1) - 1$.

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction racine nième et la fonction affine : $x \mapsto -\frac{1}{n}(x-1) - 1$).

On a alors, pour tout réel x strictement positif :

$$h'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}-1} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1-n}{n}} - 1\right) = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}\left(1 - x^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

Pour tout réel x strictement positif, le facteur $\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$ l'est également.

Le signe de $h'(x)$ est donc celui de la différence : $1 - x^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \left(\frac{1}{x^n}\right)^{n-1}$.

La fonction racine nième est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et prend ses valeurs dans cet intervalle. Comme $n \geq 2$, on a $n-1 > 0$ et la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est strictement croissante

sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit que la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{x^n}\right)^{n-1} = x^{\frac{n-1}{n}}$, composée des deux

précédentes, est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement, la fonction $x \mapsto 1 - x^{\frac{n-1}{n}}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

Comme elle s'annule pour $x = 1$, il vient :

- Pour $x \in]0; 1[$, on a $h'(x) > 0$ et la fonction h est strictement croissante ;
- Pour $x \in]1; +\infty[$, on a $h'(x) < 0$ et la fonction h est strictement décroissante.

La fonction h étant continue sur \mathbb{R}_+ comme somme de deux fonctions continues sur cet intervalle, on peut étendre la conclusion à ce point.

Racine n ème

Corrigés d'exercices

Finalement :

- Pour $x \in [0;1]$, la fonction h est strictement croissante ;
- Pour $x \in [1;+\infty[$, la fonction h est strictement décroissante.

c) D'après ce qui précède, la fonction h admet un maximum pour $x = 1$. La valeur maximale prise par h vaut donc : $h(1) = \sqrt[n]{1} - \frac{1}{n}(1-1) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$.

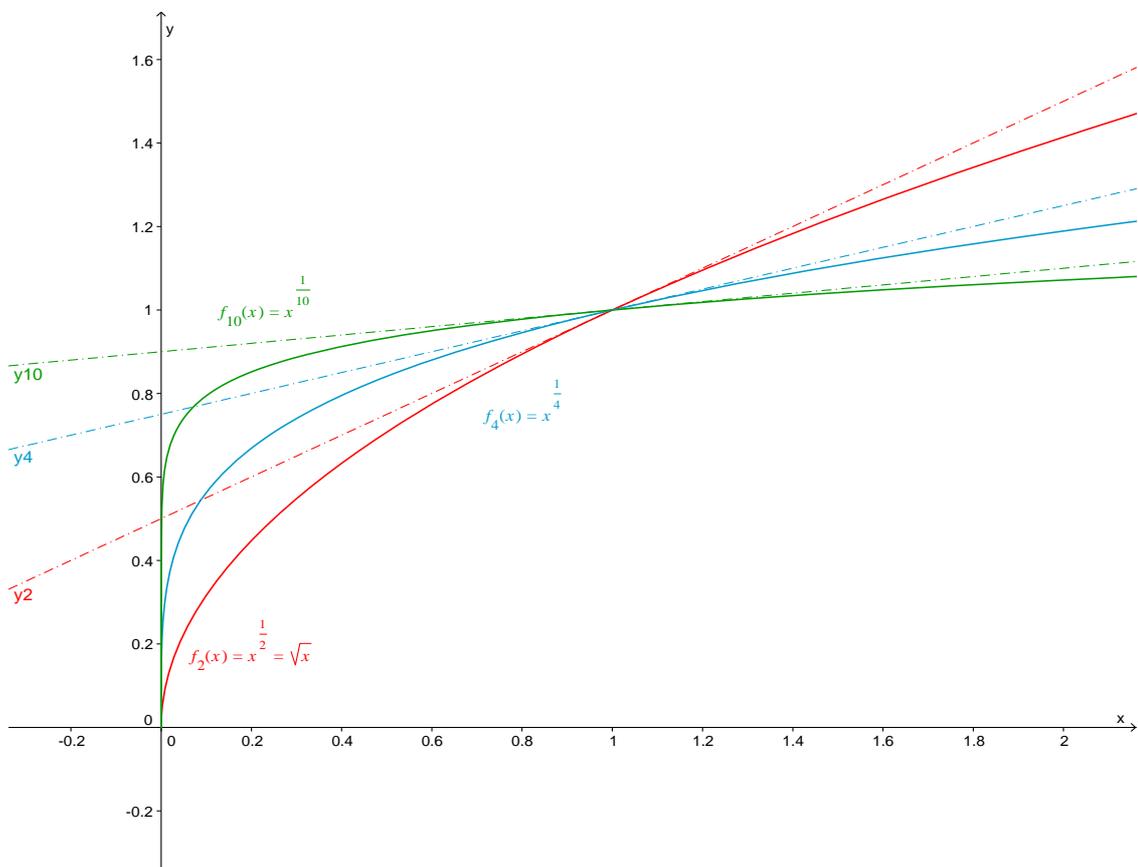
On en déduit que pour tout x positif, on a : $h(x) \leq 0$.

Soit : $\sqrt[n]{x} - \frac{1}{n}(x-1) - 1 \leq 0$, ou encore : $\sqrt[n]{x} \leq \frac{1}{n}(x-1) + 1$.

Pour une valeur de x donnée, l'ordonnée $(\sqrt[n]{x})$ du point correspondant sur \mathcal{E}_n est inférieure à l'ordonnée $\left(\frac{1}{n}(x-1) + 1\right)$ du point correspondant sur T_n . D'où :

La courbe représentative \mathcal{E}_n de la fonction racine n ème est située sous la tangente T_n au point d'abscisse $x = 1$.

A titre d'illustration, nous avons tracé dans un même repère orthonormal les courbes et les tangentes correspondant à $n = 2$ (rouge), 4 (bleu) et 10 (vert) :



N°130 page 165

1. Les réels a et b étant positifs, il en va de même pour les réels $a + b$ et $2\sqrt{ab}$.
Pour les comparer, nous pouvons comparer leurs carrés :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ et } (2\sqrt{ab})^2 = 4ab$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \\ &= (a-b)^2\end{aligned}$$

On a donc : $(a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$, d'où, finalement :

$$\boxed{a+b \geq 2\sqrt{ab}}$$

2. Remarquons d'abord que l'inégalité est immédiatement vérifiée si l'un des réels a , b ou c est nul. Nous pouvons donc supposer, à partir de maintenant que les trois réels a , b et c sont non nuls (donc strictement positifs).

Nous devons donc ici comparer deux réels strictement positifs. La fonction cube étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , nous pouvons comparer $(a+b+c)^3$ et $(3\sqrt[3]{abc})^3 = 27abc$.
Soit alors b et c deux réels strictement positifs fixés quelconques et soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\varphi(x) = (x+b+c)^3 - 27xbc$$

La fonction φ est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a, pour tout x réel strictement positif :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 3(x+b+c)^2 - 27bc \\ &= 3 \left[(x+b+c)^2 - 9bc \right] \\ &= 3 \left[(x+b+c)^2 - (3\sqrt{bc})^2 \right] \\ &= 3 \left[x+b+c-3\sqrt{bc} \right] \left[x+b+c+3\sqrt{bc} \right]\end{aligned}$$

Le facteur $x+b+c+3\sqrt{bc}$ est strictement positif.

Racine nième
Corrigés d'exercices

Quant au facteur $x + b + c - 3\sqrt{bc}$, il s'annule pour $x_0 = -(b + c) + 3\sqrt{bc}$ qui peut être positif ($b = c = 1$ par exemple) ou négatif ($b = 1$ et $c = 9$ par exemple).

Nous devons donc distinguer plusieurs situations :

→ Si $x_0 = -(b + c) + 3\sqrt{bc} < 0$

Pour tout réel x de \mathbb{R}_+^* , on a $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante.

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [(x + b + c)^3 - 27xbc] = (b + c)^3 > 0$ et on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) > 0$$

→ Si $x_0 = -(b + c) + 3\sqrt{bc} > 0$

- Pour tout réel x de $]0; x_0[$, on a $\varphi'(x) < 0$ et la fonction φ est strictement décroissante ;
- Pour tout réel x de $]x_0; +\infty[$, on a $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante.

La fonction φ admet donc un minimum global en x_0 .

Or, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi(-(b + c) + 3\sqrt{bc}) \\ &= (3\sqrt{bc})^3 - 27(-(b + c) + 3\sqrt{bc})bc \\ &= 27bc\sqrt{bc} - 27(-(b + c) + 3\sqrt{bc})bc \\ &= 27bc(\sqrt{bc} + b + c - 3\sqrt{bc}) \\ &= 27bc(b + c - 2\sqrt{bc}) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a : $b + c \geq 2\sqrt{bc}$. On en tire alors : $\varphi(x_0) \geq 0$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) \geq 0$$

Le cas $x_0 = -(b + c) + 3\sqrt{bc} = 0$ se traite comme le précédent.

Dans toutes les situations, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) \geq 0$$

Racine n^{ième}
Corrigés d'exercices

On a donc, pour tout x réel strictement positif :

$$(x+b+c)^3 - 27abc \geq 0$$

Soit :

$$x+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

On en tire, b et c ayant été choisis quelconques dans \mathbb{R}_+^* :

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

L'inégalité est finalement valable pour tous réels a , b et c dans \mathbb{R}_+ :

Pour tous réels a , b et c dans \mathbb{R}_+ , on a :

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

N°132 page 165

Les réels $n^{\frac{1}{n}}$ et $3^{\frac{1}{3}}$ étant strictement positifs, nous pouvons comparer leurs logarithmes népériens : $\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{n}\ln n}\right) = \frac{1}{n}\ln n$ et, en particulier, pour $n=3$: $\ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln 3$.

Considérons alors la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Elle y est dérivable comme rapport de deux fonctions dérivables et on a, pour tout x réel strictement positif :

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

En tenant compte de : $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ et du fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , il vient :

- Pour $x \in]0; e[$, $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante ;
- Pour $x \in]e; +\infty[$, $\varphi'(x) < 0$ et la fonction φ est strictement décroissante.

Tavaillons d'abord sur l'intervalle $]e; +\infty[$. On a : $3 \in]e; +\infty[$. Pour tout entier naturel

supérieur ou égal à 3, on a donc : $\frac{\ln n}{n} = \varphi(n) \leq \varphi(3) = \frac{\ln 3}{3}$. D'où : $n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$.

Il reste donc à traiter les cas $n=1$ et $n=2$.

Racine n ème
Corrigés d'exercices

On a d'abord : $1 < 3$ et la fonction racine cubique est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . On en déduit : $1^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{3}}$, soit $1 < 3^{\frac{1}{3}}$. Or : $1^{\frac{1}{1}} = 1^1 = 1$. On a donc : $1^{\frac{1}{1}} < 3^{\frac{1}{3}}$ et l'inégalité est bien vérifiée pour $n = 1$.

Pour $n = 2$, il convient de comparer : $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ et $3^{\frac{1}{3}}$. La fonction $x \mapsto x^6$ étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , nous pouvons comparer les puissances sixièmes de ces deux nombres :

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8 \text{ et } \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2 = 9$$

Comme $8 < 9$, il vient $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$. L'inégalité est vérifiée pour $n = 2$.

Conclusion générale :

Pour tout n entier naturel non nul, on a : $n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$.

N°138 page 167

1. Comme : $0^{\frac{2}{3}} = \left(0^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 0^2 = 0$, il vient : $f(0) = (4-0)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$.

Par ailleurs : $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$. D'où : $f(8) = (4-4)^{\frac{3}{2}} = 0^{\frac{3}{2}} = \left(0^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 0^3 = 0$.

$f(0) = 8$ et $f(8) = 0$

2. a) On cherche : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 8}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - 8}{x}$.

Nous avons affaire ici à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

L'exposant de $\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ comportant un 2 au dénominateur, nous pouvons utiliser l'expression conjuguée.

Racine nième
Corrigés d'exercices

Pour tout x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-8}{x} &= \frac{[f(x)-8][f(x)+8]}{x[f(x)+8]} \\ &= \frac{(f(x))^2 - 8^2}{x[f(x)+8]} \\ &= \frac{\left[\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 - 64}{x \left[\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 8 \right]} \\ &= \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 64}{x \left[\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 8 \right]} \end{aligned}$$

Le facteur $\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 8$ du dénominateur ne pose pas de problème puisqu'il tend vers 16 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Nous nous intéressons donc désormais à $\frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 64}{x}$ pour tout x réel strictement positif. On a, en développant le cube au numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 64}{x} &= \frac{\cancel{4^3} - 3 \times 4^2 \times x^{\frac{2}{3}} + 3 \times 4 \times \left(x^{\frac{2}{3}} \right)^2 - \left(x^{\frac{2}{3}} \right)^3 - \cancel{64}}{x} \\ &= \frac{-48 \times x^{\frac{2}{3}} + 12 \times x^{\frac{4}{3}} - x^2}{x} \\ &= -48x^{-\frac{1}{3}} + 12x^{\frac{1}{3}} - x \end{aligned}$$

Or, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(12x^{\frac{1}{3}} - x \right) = 0 - 0 = 0$ mais : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-48x^{-\frac{1}{3}} \right) = -\infty$.

Racine nième
Corrigés d'exercices

On en déduit finalement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 8}{x} = -\infty$$

b) On vient d'obtenir : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 8}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$.

On en déduit immédiatement :

La fonction f n'est pas dérivable en 0 (à droite).

c) D'après le résultat précédent, on peut conclure que :

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f admet en son point d'abscisse nulle une tangente verticale.

3. a) Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1} \right) \times \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}-1} = -x^{-\frac{1}{3}} \times \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour tout x de $]0;8]$, $f'(x) = -x^{-\frac{1}{3}} \times \left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$

b) Pour tout x strictement positif (et donc à fortiori sur $]0;8]$) on a $x^{-\frac{1}{3}} > 0$. Pour tout x de $]0;8[$, on a : $4 - x^{\frac{2}{3}} > 0$ et donc $\left(4 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} > 0$.

On déduit de ce qui précède que la dérivée de f est négative sur $]0;8]$ et ne s'y annule que pour $x = 8$. La fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle. Comme elle est continue sur $[0;8]$ comme composée de fonctions continues, on en déduit finalement :

La fonction f est strictement décroissante sur $[0;8]$.

4. On obtient :

