Suites.

Corrigés d'exercices

Version du 05/09/2013

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°11 page 23

a. Pour tout entier naturel *n*, on a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

On en tire alors, pour tout entier naturel *n* non nul : $-\frac{1}{n} \leq \sin(n) \leq \frac{1}{n}$.

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont toutes deux convergentes de limite nulle.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :

La suite (u_n) est convergente de limite nulle.

b. Pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $v_n = \frac{n+\cos(n)}{n} = 1 + \frac{\cos(n)}{n}$.

Comme précédemment, on montre facilement que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\frac{\cos(n)}{n}\right] = 1+0 = 1$.

La suite (v_n) est convergente de limite égale à 1.

N°29 page 32

1. Pour tout entier naturel *n* non nul, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } 1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ »}$$

Initialisation

Pour $n=1$, on a : $1^3+2^3+\ldots+n^3=1^3=1$, d'une part, et $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1$, d'autre part. Les deux expressions fournissent le même résultat. On en déduit que la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Hérédité

Soit *n* un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On a donc : $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Intéressons-nous alors à la somme $1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$.

On a :

$$\underbrace{1^3+2^3+\ldots+n^3}_{\substack{=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \left(\text{d'après l'hypothèse}\right. \\ \left.\text{de récurrence}\right)}}+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}\times\left[n^2+4(n+1)\right]$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}\times\left(n^2+4n+4\right)=\frac{(n+1)^2}{4}\times(n+2)^2$$

$$=\frac{(n+1)^2\left[(n+1)+1\right]^2}{4}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, 1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Remarque : en notant que l'on a $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+\ldots+n)^2$, on peut aussi écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, 1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$$

2. Pour tout entier naturel *n* non nul, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n : « \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a : $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$, d'une part, et $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{1\times\cancel{4}}{\cancel{4}\times2\times3}=\frac{1}{6}$, d'autre part. Les deux expressions fournissent le même résultat. On en déduit que la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *n* un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On a donc :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Intéressons-nous alors à la somme :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}.$$

On a :

$$\underbrace{\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}}_{\substack{=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \\ \left(\text{d'après l'hypothèse} \atop \text{de récurrence}\right)}}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\times\left[n(n+3)^2+4\right]$$

$$=\frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

En remplaçant « n » par « $n+1$ » dans l'expression $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, on obtient :

$$\frac{(n+1)\big((n+1)+3\big)}{4\big((n+1)+1\big)\big((n+1)+2\big)}=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Or : $(n+1)^2(n+4)=\left(n^2+2n+1\right)(n+4)=n^3+6n^2+9n+4$.

On en déduit ainsi :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\big((n+1)+3\big)}{4\big((n+1)+1\big)\big((n+1)+2\big)}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

N°30 page 32

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$\mathscr{P}_n$: « la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie :
pour tout réel x, on a $f_n'(x)=n\,x^{n-1}$. »

<u>Initialisation</u>
La fonction f_0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0 : x\mapsto x^0=1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction constante et pour tout x réel, on a : $f_0'(x)=0$.
Par ailleurs, pour $n=0$, la fonction $x\mapsto n\,x^{n-1}$ correspond, formellement, à la fonction nulle du fait du coefficient « n ».
On déduit de ce qui précède que la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de n, la fonction $f_n : x\mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f_n' : x\mapsto n\,x^{n-1}$.

On s'intéresse maintenant à la fonction $f_{n+1} : x \mapsto x^{n+1}$.
Pour tout x réel, on a immédiatement : $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x\, f_n(x)$.
Ainsi, la fonction f_{n+1} peut-elle être considérée comme le produit, défini sur $\mathbb{R}$, de la fonction identité et de la fonction f_n, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction f_{n+1} est également dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout *x* réel, on a alors :

$$f_{n+1}'(x) = 1 \times f_n(x) + x \times \underbrace{f_n'(x)}_{\substack{= n x^{n-1} \\ \left(\text{d'après l'hypothèse} \\ \text{de récurrence}\right)}} = x^n + x \times n\, x^{n-1} = (n+1)\,x^n = (n+1)\,x^{(n+1)-1}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie : pour tout réel *x*, on a $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$.

N°33 page 32

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } 1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! \leq n! \text{ »}$$

<u>Initialisation</u>
Pour $n = 2$, on a $1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! = 1! = 1$, d'une part, et $n! = 2! = 2$, d'autre part.
Comme $1 \leq 2$, on en conclut immédiatement que la propriété $\mathscr{P}_2$ est vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de *n*, on a :

$$1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! \leq n!$$

On s'intéresse maintenant à la somme $1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! + n!$.

On a :

$$\underbrace{1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)!}_{\substack{\leq n! \\ \left(\text{d'après l'hypothèse} \\ \text{de récurrence}\right)}} + n! \leq n! + n! = 2 \times n!$$

On a, par ailleurs : $(n+1)!-2n!=(n+1)\times n!-2n!=n!\times\left[(n+1)-2\right]=(n-1)\times n!$.
Comme $n\geq 2$, il vient $n-1\geq 1>0$ et donc $(n-1)\times n!>0$.
Ainsi : $(n+1)!-2n!>0$ et, finalement : $1!+2!+3!+...+(n-1)!+n!<(n+1)!$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n\geq 2$.

Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on a : $1!+2!+3!+...+(n-1)!\leq n!$

N°35 page 32

1. On a facilement :
   $v_0=0$ (dans l'énoncé)
   $v_1=v_0+2\times 0+1=0+1=1$
   $v_2=v_1+2\times 1+1=1+3=4$
   $v_3=v_2+2\times 2+1=4+5=9$
   $v_4=v_3+2\times 3+1=9+7=16$

   0, 1, 4, 9 et 16 sont les carrés des cinq premiers entiers naturels … On peut conjecturer : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=n^2$.

2. Pour tout entier naturel *n*, on considère, d'après la question précédente, la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

   $$\mathscr{P}_n : « \ v_n=n^2 \ »$$

   Initialisation
   D'après la question précédente, $\mathscr{P}_0$ (ce qui suffit pour initialiser le raisonnement), $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ et $\mathscr{P}_4$ sont vraies.

   Hérédité
   Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.
   On suppose que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie. C'est-à-dire : $v_n=n^2$.

   Par définition de la suite (v_n), on a : $v_{n+1}=v_n+2n+1$ d'où, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence : $v_{n+1}=v_n+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2}$$

N°38 page 33

Pour tout entier naturel *n*, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } u_n = 4\times 3^n - 1 \text{ »}$$

<u>Initialisation</u>
Pour $n=0$, on a $u_n = u_0 = 3$, d'une part, et $4\times 3^n - 1 = 4\times 3^0 - 1 = 4-1 = 3$, d'autre part. De l'égalité on conclut immédiatement que la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. On suppose donc que, pour cette valeur de *n*, on a : $u_n = 4\times 3^n - 1$.

On s'intéresse maintenant à u_{n+1}.

Par définition de la suite (u_n), on a : $u_{n+1} = 3u_n + 2$. D'où, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3\left(4\times 3^n - 1\right) + 2 = 3\times 4\times 3^n - 3 + 2 = 4\times 3^{n+1} - 1$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n\text{, on a : } u_n = 4\times 3^n - 1.}$$

N°47 page 34

a. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, on a $2x+1 \in \mathbb{R}_+^*$ et donc, en tenant compte également de $e > 0$:

$$\frac{3}{2x+1} < e \Leftrightarrow 3 < e(2x+1) \leftrightarrow 3 < 2ex + e \Leftrightarrow 3 - e < 2ex \Leftrightarrow \frac{3-e}{2e} < x$$

- Si $3 - e < 0$, c'est-à-dire $e > 3$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2x+1} < e$ est $\mathbb{R}_+$.
- Si $3 - e \geq 0$, c'est-à-dire $e \in \left]0\,;3\right]$ (n'oublions pas que le réel *e* est strictement positif) alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2x+1} < e$ est l'intervalle $\left]\frac{3-e}{2e}\,;+\infty\right[$.

b. a. On a : $u_n < e \Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < e$.
D'après la question précédente, il vient (on résout en fait l'inéquation dans $\mathbb{N}$ cette fois-ci) :

- Si $3 - e < 0$, c'est-à-dire $e > 3$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$ est $\mathbb{N}$.
- Si $3 - e \geq 0$, c'est-à-dire $e \in \left]0\,;3\right]$ alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$ est l'ensemble des nombres entiers naturels appartenant à l'intervalle $\left[\mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)+1\,;+\infty\right[$ où $\mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)$ désigne la partie entière du réel $\frac{3-e}{2e}$ ($\mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)+1$ est donc le plus petit entier naturel solution de l'inéquation $\frac{3}{2n+1} < e$).

Ainsi, pour toute valeur de *e* dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe un rang *N* tel que $n \geq N \Rightarrow u_n < e$ ($N = 0$ si $e > 3$ et $N = \mathrm{E}\left(\frac{3-e}{2e}\right)+1$ si $e \in \left]0\,;3\right]$).

b. Pour tout entier naturel *n*, on a $u_n > 0$. D'après la question précédente, pour tout réel strictement positif *e*, il existe un rang *N* tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n < e$, d'où $u_n \in \left]-e\,;e\right[$.
<u>Par définition</u>, on en conclut alors que la suite (u_n) converge vers 0.

N°48 page 34

$$\boxed{u_n = \frac{2}{n}\ \ (n>0)}$$

a. On a, $u_n = f(n)$ où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \mapsto f(x) = \frac{2}{x}$.
La fonction inverse étant strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il en va de même pour la suite (u_n).

b. On conjecture, par exemple à l'aide de la calculatrice ou en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. On cherche un rang *p* tel que : $n \geq p \Rightarrow u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[$.
Les termes de la suite étant strictement positifs, on a : $u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[\Leftrightarrow u_n < 10^{-4}$.
Il vient alors :

$$u_n < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{2}{n} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{10^{-4}} \Leftrightarrow \frac{n}{2} > 10^4 \Leftrightarrow n > 2\times 10^4 = 20\,000$$

On peut donc choisir $p = 20\,001$

d. On généralise la démarche de la question précédente en remplaçant 10^{-4} par un réel *e* strictement positif :

$$u_n < e \Leftrightarrow \frac{2}{n} < e \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow n > \frac{2}{e} \Leftrightarrow n \geq \mathrm{E}\left(\frac{2}{e}\right)+1$$

Pour tout réel strictement positif *e*, on pose $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\frac{2}{e}\right)+1$ et on a : $n \geq \mathrm{N} \Rightarrow u_n < e$.
On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

$$\boxed{u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}}$$

a. On a, $u_n = f(n)$ où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en va donc de même de la fonction $x \mapsto 1+\sqrt{x}$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction *f*, composée de ces deux fonctions, est donc elle-même strictement décroissante.

Il en va de même pour la suite (u_n).

b. On conjecture, par exemple à l'aide de la calculatrice ou en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n}\right)=+\infty$, que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. On cherche un rang p tel que : $n \geq p \Rightarrow u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[$.
Les termes de la suite étant strictement positifs, on a : $u_n \in \left]-10^{-4}\,;10^{-4}\right[\Leftrightarrow u_n < 10^{-4}$.
Il vient alors :

$$u_n < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{n}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{-4}} < 1+\sqrt{n} \Leftrightarrow 10^4 - 1 < \sqrt{n}$$

Les deux membres de la dernière inégalité étant positifs, on a :

$$10^4 - 1 < \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(10^4 - 1\right)^2 < n$$

On peut donc choisir $p = \left(10^4 - 1\right)^2 + 1 = 99\,980\,002$.

d. Ici encore, on généralise la démarche de la question précédente en remplaçant 10^{-4} par un réel e strictement positif :

$$u_n < e \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{n}} < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < 1+\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n}$$

En toute rigueur, on doit distinguer deux cas :

- Si $e > 1$ alors $\frac{1}{e} - 1 < 0$ et l'inégalité $\frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n}$ est vérifiée pour toute valeur de n.
- Si $e \leq 1$ alors $\frac{1}{e} - 1 \geq 0$ et on a : $\frac{1}{e} - 1 < \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2 < n$. On peut alors considérer $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\left(\frac{1}{e} - 1\right)^2\right) + 1$.

Dans tous les cas, on peut trouver une valeur N telle que : $n \geq \mathrm{N} \Rightarrow u_n < e$.
On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

N°54 page 34

Nous allons établir le résultat en utilisant la définition. Il convient donc de montrer que pour tout réel A, il existe un rang N à partir duquel on a $u_n < \mathrm{A}$.
Soit donc A un réel.
On a : $-2n^2 + 3 < \mathrm{A} \Leftrightarrow 2n^2 > 3 - \mathrm{A} \Leftrightarrow n^2 > \frac{3-\mathrm{A}}{2}$.

On distingue donc deux situations :

- Si $A > 3$ alors $\frac{3-A}{2} < 0$ et l'inégalité $n^2 > \frac{3-A}{2}$ est vérifiée pour tout entier naturel *n*. Il suffit alors de choisir $N = 0$ par exemple.
- Si $A \le 3$ alors $\frac{3-A}{2} \ge 0$ et on a : $n^2 > \frac{3-A}{2} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3-A}{2}}$.

  Il suffit alors de considérer : $N = E\left(\sqrt{\frac{3-A}{2}}\right) + 1$.

Dans tous les cas, pour un A réel quelconque fixé, on peut trouver une valeur N telle que : $n \ge N \Rightarrow u_n < A$.
On en déduit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$.

N°57 page 34

a. On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{produit}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, nous avons affaire à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Pour tout entier naturel *n*, on a : $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$.
On a alors :

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (-1) = -1\end{array}\right\} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{produit}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} n^2(n-1) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

N°58 page 34

a. On a :

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2=2\end{array}\right\}\overset{\text{produit}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1=1\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3=3\end{array}\right\}\overset{\text{rapport}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2n+1}=0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=0}$$

b. On a, en procédant de façon similaire :

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)=-2\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1=1\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{rapport}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n+1}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5=5\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\frac{-2}{n+1}\right)=5$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n=5}$$

N°64 page 34

a. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n=\frac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\times n\left(\frac{3}{n}-1\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n}-1\right)}{2+\frac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}-1\right)=-1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$$

Et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n}-1\right)}{2+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1\times(-1)}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}}$$

b. On procède de façon similaire. Pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = \left(n-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{2n^2}\right) = n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\times\frac{1}{2n^2}\times n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Et enfin (produit) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}}$$

N°74 page 36

1. Comme, pour tout entier naturel n, on a : $-1 \le (-1)^n \le 1$, il vient : $\dfrac{-1}{n+1} \le u_n \le \dfrac{1}{n+1}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

   Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (u_n) est convergente et que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

2. On procède de façon similaire à ce qui vient d'être fait.

   Comme, pour tout entier naturel n, on a : $-1 \le \cos(n) \le 1$, il vient : $\dfrac{-1}{n^2} \le v_n \le \dfrac{1}{n^2}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (v_n) est convergente et que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

$$\boxed{(v_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.}$$

N°77 page 36

1. A la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{\begin{gathered} u_{10} \simeq 1{,}996\,357 \\ u_{100} \simeq 1{,}999\,952 \end{gathered}}$$

Il semble que la suite (u_n) converge vers 2.

2. Pour tout n entier naturel, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$.
On en déduit : $-3 \leq -3\sin n \leq 3$ puis : $2n^2 - 3 \leq 2n^2 - 3\sin n \leq 2n^2 + 3$ et, enfin :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leq \frac{2n^2-3\sin n}{n^2+1} \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{2n^2-3}{n^2+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$.
Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2n^2-3}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} = \frac{n^2\left(2-\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} \text{ et } \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \frac{n^2\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$, il vient (somme) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$$

On en déduit finalement (rapport) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que la suite (u_n) est convergente de limite égale à 2.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

3. a. A la question 2, nous avons obtenu, pour tout entier naturel n :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

On en déduit immédiatement : $\frac{2n^2-3}{n^2+1} - 2 \leq u_n - 2 \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1} - 2$.

Soit : $\frac{2n^2-3-2(n^2+1)}{n^2+1} \leq u_n - 2 \leq \frac{2n^2+3-2(n^2+1)}{n^2+1}$.

Soit encore : $\frac{-5}{n^2+1} \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{n^2+1}$.

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-5}{n^2+1} \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{n^2+1}}$$

b. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{5}{n^2+1}$, l'inégalité obtenue à la question précédente entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-5}{n^2+1} \leq u_n - 2 \leq \frac{5}{n^2+1}$$

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \frac{5}{n^2+1}$.

Ainsi, si, à partir d'un certain rang N, on a l'inégalité : $\frac{5}{n^2+1} < 10^{-3}$ alors, on aura également l'inégalité $|u_n - 2| < 10^{-3}$. En d'autres termes, la distance entre u_n et 2 sera inférieure à 10^{-3}.

On a :

$$\frac{5}{n^2+1}<10^{-3} \Leftrightarrow \frac{n^2+1}{5}>10^3 \Leftrightarrow n^2+1>5\,000 \Leftrightarrow n^2>4\,999 \Leftrightarrow n>\sqrt{4\,999}$$

Or : $\sqrt{4\,999} \simeq 70,7$. Ainsi, pour $n \geq 71$, on aura $\frac{5}{n^2+1}<10^{-3}$ et donc $|u_n-2|<10^{-3}$.

A partir du rang $N=71$, on est certain que la distance entre u_n et 2 est inférieure à 10^{-3}.

c. On a $u_n=\frac{2n^2-3\sin n}{n^2+1}=\frac{2\left(n^2+1\right)-2-3\sin n}{n^2+1}=2-\frac{2+3\sin n}{n^2+1}$.

Si $2+3\sin n<0$, c'est-à-dire $\sin n<-\frac{2}{3}$ alors on aura $u_n>2$.

En l'occurrence $\sin 74 \simeq -0,985<-\frac{2}{3}$ et $u_{74} \simeq 2,000\,174$.

Pour tout entier $n \geq 71$, on n'a pas nécessairement $u_n \leq 2$.

N°82 page 37

1. L'objectif de cette question est d'établir la croissance de la suite *u*.
   On a immédiatement :

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=u_n^2+3u_n+1 \\ \Leftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=u_n^2+3u_n+1-u_n \\ \Leftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=u_n^2+2u_n+1 \\ \Leftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=\left(u_n+1\right)^2 \end{aligned}$$

   Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \left(u_n+1\right)^2 \geq 0$, la relation de récurrence définissant la suite *u* entraîne donc sa croissance et ce, quelle que soit la valeur de u_0. Il n'est donc pas utile de montrer que l'on a $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel *n* (une récurrence simple permet d'établir ce résultat) qui s'avère une conséquence immédiate de cette croissance et du fait que u_0 est égal à 0.

La suite *u* est croissante.

2. On suppose que la suite u est majorée.
   Dès lors, étant croissante et majorée, la suite *u* est convergente. Notons *L* sa limite.

A la question précédente, on a montré que l'on avait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2$.

Or : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = L - L = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_n + 1)^2 = (L+1)^2$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_n + 1)^2$, il vient donc

$0 = (L+1)^2$ soit, finalement : $L = -1$.

Si la suite u est majorée alors on a nécessairement : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.

3. Le résultat précédent est absurde puisque l'on a, d'après la question 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Il en résulte alors que la limite L de la suite u est nécessairement positive. Ainsi, la limite L ne peut être égale à -1.
   Aboutissant à une contradiction, on en tire que la suite u n'est pas majorée.
   Etant croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

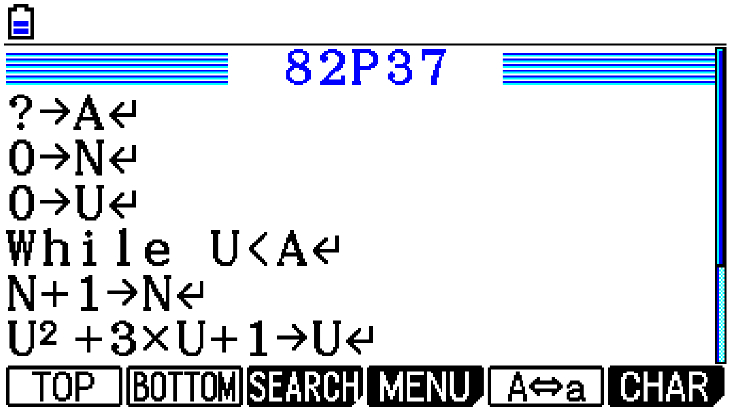
4. a. Nous proposons l'algorithme suivant, écrit en langage pseudo-naturel :

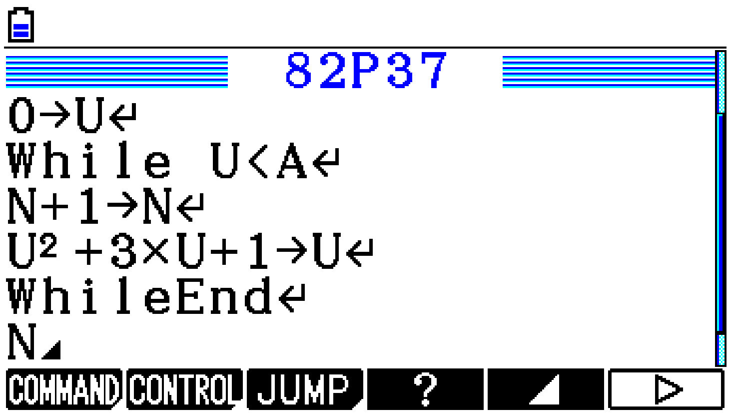
```
Variable :    N entier
              U réel
              A réel

Début :
              N ← 0
              U ← 0
              Lire A
              TantQue  U < A
                      Faire   N ← N+1
                              U ← U² + 3U + 1
              FinTantQue
              Afficher N
Fin
```

   b. Pour $\mathrm{A} = 1\,000$, on obtient : $\mathrm{N} = 4$.
   Pour vérifier : $u_3 = 41$ et $u_4 = 1\,805$
   Pour $\mathrm{A} = 10^6$, on obtient : $\mathrm{N} = 5$.
   Pour vérifier : $u_4 = 1\,805$ et $u_5 = 3\,263\,441$

Sur ma CASIO, j'ai écrit le programme suivant :





N°84 page 37

1. Comme $\frac{2}{3} \in \left]-1\,;+1\right[$, on a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

   Il vient alors (différence) : $\lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1-0 = 1$ puis (rapport) :

   $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{1} = 2$.

   Enfin (différence) : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right) = 1-2 = -1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}$$

2. Comme 6 et 7 sont deux réels strictement supérieurs à 1, on a immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} 6^n = \lim_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$$

Pour (v_n), nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Comme $7 > 6$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 7^n > 6^n$. On va donc factoriser par 7^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 6^n - 7^n = 7^n\left(\frac{6^n}{7^n} - 1\right) = 7^n\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right)$$

Comme $0 < 6 < 7$, il vient $\frac{6}{7} \in \left]-1\,;+1\right[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$.

On en déduit (somme) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right) = -1$ puis (produit) : $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$$

N°95 page 40

Partie A – Question de cours

Soit A un réel.
Comme la suite (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n > A$.
Mais comme, pour tout entier naturel n, $v_n \geq u_n$, il vient : $n \geq N \Rightarrow v_n > A$.
On en déduit ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Le résultat est établi.

Partie B

1. On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3}\times 1 - 2 = \boxed{-\frac{5}{3}}$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = \boxed{-\frac{14}{9}}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{14}{9}\right) = \boxed{-\frac{14}{27}}$$

2. a. Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 4, on considère la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\mathscr{P}_n \ : « \ u_n \geq 0 \ »$$

Initialisation

Pour $n = 4$, on a : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81} > 0$.
La propriété $\mathscr{P}_4$ est donc vraie.

Hérédité

Soit *n* un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à 4.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $u_n \geq 0$
Comme $n \geq 4$ alors on a : $n - 2 \geq 2 > 0$.
Comme $u_n \geq 0$ alors on a : $\frac{1}{3}u_n \geq 0$.
On en déduit alors $\frac{1}{3}u_n + n - 2 > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion

Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 4, $u_n \geq 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow u_n \geq 0}$$

b. Pour tout entier $n \geq 5$, on a : $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$.
Mais $n \geq 5 \Leftrightarrow n - 1 \geq 4$. D'après le résultat de la question précédente, on a donc : $u_{n-1} \geq 0$.
D'où $\frac{1}{3}u_{n-1} \geq 0$ puis $\frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geq n - 3$ c'est-à-dire $u_n \geq n - 3$.
Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \Rightarrow u_n \geq n - 3}$$

c. On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \Rightarrow u_n \geq n - 3$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n - 3) = +\infty$, le théorème de comparaison nous permet alors de conclure immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

3. a. Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3(n+1) - \frac{21}{2}$$
$$= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Par ailleurs : $v_0 = -2u_0 + 3\times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

b. D'après le résultat précédent, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$, soit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$.

Il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}\left(-v_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(-\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

c. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = +\infty$.

Par ailleurs, comme $\frac{1}{3} \in \left]-1\,;+1\right[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit alors (somme) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = +\infty$ soit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

On a ainsi retrouvé la limite de la suite (u_n) obtenue à la question 2.c.

4. Rappelons que l'on a (question 3.b.) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

On en tire, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4} \right) \\ &= \frac{25}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n} k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^{n} 1 \end{aligned}$$

On a immédiatement :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{25}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n} k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{25}{4} \times \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\ &= \frac{75}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3n(n+1)}{4} - \frac{21(n+1)}{4} \\ &= \frac{75}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4}(n-7)(n+1) \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{3} \in]-1\,;+1[$, on a : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n \to +\infty} \frac{75}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{75}{8} \times (1-0) = \frac{75}{8}$
.

Par ailleurs : $\lim_{n \to +\infty} (n+1) = \lim_{n \to +\infty} (n-7) = +\infty$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{4}(n-7)(n+1) = +\infty$.

Ainsi, on a finalement (somme) : $\lim_{n \to +\infty} \left\{ \frac{75}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4}(n-7)(n+1) \right\} = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$

N°98 page 41

Partie A

1. P_1 est **fausse** car pour $n = 1$, on a : $4^n = 4^1 = 4$ mais $4n + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5 > 4$.
   P_2 est **fausse** car pour $n = 2$, on a $4^n = 4^2 = 16$ mais $4n + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9 < 16$.
   P_3 est **vraie** car l'inégalité $4^n \leq 4n + 1$ est vérifiée pour $n = 1$.
   P_4 est **fausse** car l'inégalité $4^n \leq 4n + 1$ est vérifiée pour $n = 0$ $(1 \leq 1)$ et $n = 1$.

2. La négation de « Pour tout entier *n*, $4^n > 4n + 1$ » est « il existe un entier *n* tel que $4^n \leq 4n + 1$ ». Il s'agit donc de la proposition P_3.

Partie B

1. a. $4(p+1)+1-4(4p+1) = 4p + \cancel{4} + 1 - 16p - \cancel{4} = -12p + 1$

   b. Pour tout entier $p \geq 1$, on a : $-12p \leq -12$ d'où $-12p + 1 \leq -11 < 0$.
   En reprenant le résultat de la question a. on a donc :

$$4(p+1)+1-4(4p+1) = -12p + 1 < 0$$

   D'où : $4(p+1)+1 < 4(4p+1)$. Le résultat est ainsi établi.

2. En testant quelques valeurs faibles de *n* (ou en réfléchissant à la croissance de 4^n et à celle de $4n+1$ … ☺), on peut conjecturer que l'inégalité est vérifiée pour $n \geq 2$.
   Démontrons cette conjecture par récurrence.

   On considère donc, pour tout *n* entier supérieur ou égal à 2, la propriété :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } 4^n > 4n + 1 \text{ »}$$

   Initialisation

   Pour $n = 2$, on a : $4^n = 4^2 = 16$ et $4n + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9$. On a $16 > 9$.
   La propriété $\mathscr{P}_2$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *n* un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à 2.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $4^n > 4n+1$.
On s'intéresse à $\mathscr{P}_{n+1}$. On va donc comparer 4^{n+1} et $4(n+1)+1$.

Comme $4^n > 4n+1$ (hypothèse de récurrence), on a : $4\times 4^n > 4\times(4n+1)$, c'est-à-dire $4^{n+1} > 4\times(4n+1)$.
Comme *n* est supérieur ou égal à 2, on peut utiliser le résultat de la question 1.b : on a donc $4\times(4n+1) > 4\times(n+1)+1$.
Finalement : $4^{n+1} > 4\times(4n+1) > 4\times(n+1)+1$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

<u>Conclusion</u>

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 \Rightarrow 4^n > 4n+1}$$

N°103 page 42

Partie A

1. Une suite (u_n) n'est pas majorée si, pour tout réel *M*, on peut trouver un rang *N* (ce rang dépend donc A PRIORI du réel *M*), tel que $u_N \geq M$.

2. a. La suite étant croissante, on a : $n \geq n_0 \Leftrightarrow u_n \geq u_{n_0}$.
Comme $u_{n_0} > M$, on en déduit immédiatement $u_n > M$.
Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n > M$.

   b. D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que pour tout réel *M*, il existe un certain rang n_0 tel que a partir de ce rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]M\,;+\infty[$. Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On vient d'établir le résultat fondamental :

$$\boxed{\text{Pour toute suite } (u_n) \text{ croissante et non majorée, on a : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Partie B

1. Récurrence immédiate (pour l'hérédité, si on suppose $u_n \geq 1$, on a $u_n > 0$ et donc $\frac{1}{u_n} > 0$.

   On en déduit $u_n + \frac{1}{u_n} > 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$, à fortiori $u_{n+1} \geq 1$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1}$$

2. A la question précédente, on a établi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

   On en déduit immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3. a. La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

   b. On a, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

   La suite (u_n) étant convergente, il en va de même pour les suites (u_{n+1}) et $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ et il vient, d'après l'égalité ci-dessus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$$

   La limite de la suite (u_n) est bien solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$.

$$\boxed{\text{La limite de la suite } (u_n) \text{ est solution de l'équation } x = x + \frac{1}{x}.}$$

4. On a $x = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$ qui n'admet pas de solution. L'hypothèse « (u_n) majorée » conduit donc à une contradiction. On en déduit que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Comme la suite (u_n) est croissante, on en déduit (cf. la partie A) qu'elle tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

N°104 page 43

1. Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n\right) - u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$$

On en déduit immédiatement que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$.

Par ailleurs, on a : $v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } -\frac{2}{3} \text{ et de premier terme } v_0 = 1.}$$

2. Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n\right) + \frac{2}{3}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = w_n$$

On en déduit que la suite (w_n) est constante.

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est constante.}}$$

3. On a : $w_1 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1 + \frac{2}{3}\times 0 = 1$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 1.}$$

4. D'après la première question, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

On a aussi : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = 1 = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On en déduit :

$$u_{n+1} = u_n + v_n = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } 1 = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{3}u_n$$

Finalement : $u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Comme $-\frac{2}{3} \in \left]-1\,;+1\right[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et on en tire enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\times 0 = \frac{3}{5}$.

La suite (u_n) converge et admet pour limite $\frac{3}{5}$.

N°109 page 43

1. On pose $\mathscr{P}_n$: « $\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$ ».

Initialisation.

Pour $n = k$, on a $\frac{k^n}{n!} = \frac{k^k}{k!}$ et l'inégalité (qui, dans ce cas, est une égalité) est trivialement vérifiée.

Hérédité.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à k fixé. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie.
On a donc : $\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$.
On a $n+1 > n \ge k$. Donc : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \le \frac{1}{k}$ et donc : $\frac{k}{n+1} < \frac{k}{n} \le \frac{k}{k} = 1$. D'où : $\frac{k}{n+1} < 1$.
Il vient alors : $\frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!} < 1 \times \frac{k^n}{n!}$, c'est-à-dire $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{k^n}{n!}$.
Comme $\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$, on en déduit finalement : $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{k^k}{k!}$.
La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge k \Rightarrow \frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$$

2. A la question précédente, on a établi que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on avait : $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$. Soit : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{k^n} \times \frac{k^k}{k!}$.
   Pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a : $x^n \geq 0$.
   D'où : $\frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^n}{k^n} \times \frac{k^k}{k!} = \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } k : \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.}$$

3. Comme $0 \leq x < k$, on a : $0 \leq \frac{x}{k} < 1$ et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$ puis, l'entier k étant fixé :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}\right] = 0$$

   Comme $0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$, il vient enfin, grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0}$$